Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Wir betrachten die Größe $A(t)$ der Fischpopulation eines Sees.

Die Anfangspopulation (zum Zeitpunkt $t = 0$) bestehe aus fünf Fischen. Langfristig stabilisiere sich die Größe der Population bei 120 Fischen. Zu Beginn sei das Wachstum $A'(0) = 7$.

Wir betrachten nun zwei verschiedene Modelle:

(a) Die Populationsentwicklung verläuft gemäß einer Bertanlanffy-Funktion

$$A(t) = B - (B - A_0) \cdot e^{-kt},$$

wobei $0 < A_0 < B$ und $k > 0$.

(b) Die Populationsentwicklung verläuft gemäß einer (verschobenen) Michaelis-Menten-Funktion

$$A(t) = \frac{B \cdot t}{t + K} + A_0,$$

wobei $B, K, A_0 > 0$.

Zu welchem Zeitpunkt hat sich bei den beiden Modellen die Populationsgröße (im Vergleich zum Beginn) vervierfacht?

Zeichnen Sie die Funktionen in ein Koordinatensystem ein!

Aufgabe 2. Gegeben seien folgende Daten einer Populationsgröße $P(t)$ in Abhängigkeit von dem Zeitpunkt t:

t	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(t)$	$0,06$	$0,11$	$0,20$	$0,35$	$0,60$	$1,00$	$1,57$	$2,27$	$3,01$	$3,67$	$4,17$

Verläuft die Populationsentwicklung eher nach einer (vertikal verschobenen) Michaelis-Menten-Funktion oder eher nach einer logistischen Funktion? Warum?

Hinweis: Tragen Sie die Daten in ein Koordinatensystem ein! Durch den Funktionsverlauf kann einer der beiden Fälle explizit ausgeschlossen werden. Die Frage ist nun: Welcher Fall ist das, und woran sieht man das?

(Bitte wenden!)

Späteste Abgabe: Mi, 25.6.2008, 10 Uhr

Angela Holtmann

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass man jede logistische Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{B}{1 + ke^{-\lambda Bx}}, \quad B, k, \lambda > 0,$$

als lineare Skalierung des Tangens hyperbolicus

$$\tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

schreiben kann!

Hinweis: Gesucht sind also (in Abhängigkeit von den Parametern B, k, λ für eine bestimmte Funktion f der obigen Form) Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass

$$a \cdot \tanh(bx + c) + d = f(x)$$

ist.

Aufgabe 4. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$f'(t) = 2 \cdot \operatorname{sgn}(f(t)) \cdot \sqrt{|f(t)|},$$

wobei $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ durch

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

definiert ist und $|\quad| : \mathbb{R} \to \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$ die Betragsfunktion mit

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

ist.

Zeigen Sie, dass es unendlich viele Lösungen für die Differentialgleichung mit dem Anfangswert $f(0) = 0$ gibt.

Zeigen Sie dazu, dass für jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$ die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{falls } t < c \\ (t - c)^2, & \text{falls } t \geq c \end{cases}$$

die Differentialgleichung erfüllt und auch $f(0) = 0$ gilt.

Zusatzfrage: Gibt es weitere Lösungen der Differentialgleichung mit $f(0) = 0$?

Späteste Abgabe: Mi, 25.6.2008, 10 Uhr

Angela Holtmann