Übungsblatt 12

Aufgabe 1. In der folgenden Tabelle sind die Sonnenaufgangszeiten (A) und Sonnenuntergangszeiten (U) in Bielefeld jeweils am 1. (links in der Tabelle) und 16. (rechts in der Tabelle) eines Monats notiert. Berechnen Sie die mittlere Tageslänge für jeden Monat, indem Sie die Keplersche Fassregel anwenden:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right),$$

wobei a und b die jeweiligen Monatsanfänge (1. des Monats) bezeichnen sollen und mit Monatslängen von jeweils 30 Tagen gerechnet werden soll. (Dadurch liegt der 16. jedes Monats zum Zeitpunkt $\frac{a+b}{2}$.)

Monat	A	U	A	U
Januar	8:27 Uhr	16:24 Uhr	8:21 Uhr	16:43 Uhr
Februar	8:01 Uhr	17:11 Uhr	7:37 Uhr	17:37 Uhr
März	7:08 Uhr	18:02 Uhr	6:38 Uhr	18:26 Uhr
April	6:02 Uhr	18:56 Uhr	5:25 Uhr	19:20 Uhr
Mai	4:57 Uhr	19:42 Uhr	4:33 Uhr	20:04 Uhr
Juni	4:12 Uhr	20:28 Uhr	4:05 Uhr	20:39 Uhr
Juli	4:08 Uhr	20:42 Uhr	4:19 Uhr	20:36 Uhr
August	4:43 Uhr	20:13 Uhr	5:04 Uhr	19:49 Uhr
September	5:30 Uhr	19:14 Uhr	5:52 Uhr	18:42 Uhr
Oktober	6:22 Uhr	18:01 Uhr	6:45 Uhr	17:30 Uhr
November	7:14 Uhr	16:57 Uhr	7:39 Uhr	16:34 Uhr
Dezember	8:01 Uhr	16:19 Uhr	8:19 Uhr	16:13 Uhr

Aufgabe 2. Folgende Funktion h beschreibt den Höchststand der Sonne für Bielefeld (in Grad) in Abhängigkeit vom Tag t des Jahres (s. a. Kapitel 7 im Leitfaden):

$$h(t) = 23 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360} \cdot (t-81)\right) + 38.$$

Wir gehen dabei davon aus, dass jeder Monat des Jahres 30 Tage hat. Berechnen Sie den Mittelwert der Höchststände der Sonne für den Monat Mai (mit Hilfe von Integration)!

(Bitte wenden!)

Aufgabe 3. Vektoren im $\mathbb{R}^n$ sind nichts anderes als n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ reeller Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dabei nennen wir a_i die i-te Komponente des Vektors $(a_1, \ldots, a_n)$.
Wir definieren eine so genannte *Skalarmultiplikation* von reellen Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ mit Vektoren $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\lambda \cdot (a_1, \ldots, a_n) := (\lambda \cdot a_1, \ldots, \lambda \cdot a_n),$$

also durch Multiplikation der einzelnen Komponenten mit der vorgegebenen Zahl.
Die *Länge* eines Vektors $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Der *Winkel* zwischen zwei Vektoren $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ im $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\arccos\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}}\right),$$

wobei arccos den Arcus-Kosinus bezeichnet.

(a) Berechnen Sie den Winkel zwischen jeweils zwei der Vektoren $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ im $\mathbb{R}^3$ und die Länge der angegebenen Vektoren!

(b) Zeigen Sie: Stehen zwei Vektoren $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ senkrecht aufeinander, ist also

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} = 0,$$

so stehen auch alle Vielfachen $\lambda \cdot (a_1, \ldots, a_n)$ und $\mu \cdot (b_1, \ldots, b_n)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der beiden Vektoren senkrecht aufeinander.

(c) Gegeben seien die Vektoren $(1, 3)$ und $(4, 2)$ im $\mathbb{R}^2$. Finden Sie zu jedem der beiden Vektoren einen Vektor, der senkrecht auf ihm steht!

Aufgabe 4. Mit welcher Geschwindigkeit kommt ein Springer vom Fünf-Meter-Turm auf der Wasseroberfläche auf, und wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit während des Fluges? (Gehen Sie davon aus, dass der Springer direkt senkrecht nach unten springt (und nicht zuerst ein wenig nach oben) und eine Anfangsgeschwindigkeit von 0 km/h hat!)