Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(t) = \sum_{i=1}^{n}(t-x_i)^2$ an der Stelle $t = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ ihr Minimum annimmt!

Hinweis: Verwendet werden dürfen hierbei die aus der Schule bekannten Ableitungsregeln für Polynome und folgendes Kriterium, um ein lokales Minimum zu bestimmen:

> Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ hat an der Stelle $x = x_0$ ein lokales Minimum, falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist.

Zu überprüfen ist nun auch noch, dass es auch ein *globales* Minimum ist, z. B., indem man zeigt, die Funktionswerte von f für $x \to \pm\infty$ gegen $+\infty$ streben.

Aufgabe 2. Berechnen Sie folgende Ausdrücke bzw. schreiben Sie sie in ausführlicher Form hin:

- $\sum_{i=3}^{5} 2^i$
- $\sum_{j=-3}^{2} j$
- $\sum_{i=2}^{6} \frac{x_i^7}{i-1}$
- $\sum_{k=1}^{10} k$
- $\sum_{k=1}^{10} k^2$
- $\sum_{i=1}^{100} i$

  (Tipp: Fragen Sie den kleinen Gauß nach einem Trick!)
- $\sum_{j=0}^{2} \frac{2}{i}$ mit $i \neq 0$

  (Achtung: Das hier ist *kein* Tippfehler! i und j sind verschieden.)
- $\sum_{i=0}^{13} \frac{1}{14}$

(Bitte wenden!)

Späteste Abgabe: Mi, 30.4.2008, 10 Uhr

Angela Holtmann

Aufgabe 3. Gegeben seien folgende Datenpaare:

$$(x_1, y_1) = (1, 2), \ (x_2, y_2) = (3, 5) \text{ und } (x_3, y_3) = (6, 6).$$

Zeichnen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem ein!
Bestimmen Sie die Regressionsgerade $f(x) = ax + b$ zu diesen Datenpaaren, wobei hier die y-Werte von den x-Werten abhängen sollen!
Zeichnen Sie den Graphen von f in das Koordinatensystem ein!

Bestimmen Sie anschließend die Regressionsgerade $g(x) = cx + d$, die sich ergibt, wenn die x-Werte von den y-Werten abhängen sollen!
Zeichnen Sie auch den Graphen von g zusammen mit den Punkten, die sich durch Vertauschung der x- und y-Werte aus den oben genannten Zahlenpaaren ergeben, in ein Koordinatensystem ein!

Zusatzfrage: Wie man sehen kann, gilt hier $a \neq \frac{1}{c}$. Warum ist das möglich? (Tipp: Welche Ausdrücke werden hier jeweils minimiert?)

Aufgabe 4. Gegeben seien folgende Datenpaare:

$$(x_1, y_1) = (3, 3), \ (x_2, y_2) = (4, 3), \ (x_3, y_3) = (6, 6), \ (x_4, y_4) = (7, 5) \text{ und } (x_5, y_5) = (4, 3).$$

Fügen Sie je zwei weitere Paare (x_6, y_6) und (x_7, y_7) hinzu, so dass die Mittelwerte $\overline{x}$ und $\overline{y}$ gleich bleiben, jedoch die Steigung der neuen Regressionsgeraden zu den sieben Punkten im Vergleich zu der für die fünf gegebenen Punkte

- kleiner wird,
- größer wird,
- gleich bleibt!