Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = 7 \cdot \cos(4x)$. Zeigen Sie, dass die Funktion ihr eigenes trigonometrisches Polynom ist!

Hinweis: Zu zeigen ist also, dass die Koeffizienten a_n, b_n, c in einer Darstellung der Funktion

$$f(x) = c + \sum_{n}^{N} a_n \sin(nx) + \sum_{n}^{N} b_n \cos(nx)$$

alle gleich Null sind – bis auf den Koeffizienten b_4, für den $b_4 = 7$ gelten muss/soll.
Zu berechnen sind also die Integraldarstellungen der Koeffizienten a_n, b_n und c.

Verwendet werden dürfen für diese Aufgabe die Identitäten

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt)\,dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos(nt)\,dt = 0,$$

die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus sowie die aus der Schule bekannten Rechenregeln für Integrale (z. B. die Produktregel).

Aufgabe 2. Gegeben sei die Funktion $g(t) := 5 \cdot \sin(3t - 8) + 23$. Wo hat die Funktion ihre lokalen Maxima und lokalen Minima?

Verwendet werden darf, dass die Menge der lokalen Maxima der Funktion $f(t) := \sin(t)$ genau die Menge $\{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, die Menge der lokalen Minima der Funktion $f(t)$ genau die Menge $\{\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und die Menge der Nullstellen von $f(t)$ genau die Menge $\{m \cdot \pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$ ist und dass

$$\cos(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Außerdem dürfen die aus der Schule bekannten Ableitungsregeln sowie das Kriterium für lokale Minima (und das entsprechende für lokale Maxima) aus Aufgabe 1 des Übungsblattes 3 benutzt werden.

Aufgabe 3.

(a) Die Frequenz des Kammertons a', nach dem Orchesterspieler ihre Instrumente stimmen, beträgt 440 Hz. Wie groß ist die Schwingungsdauer einer derartigen Schallwelle?

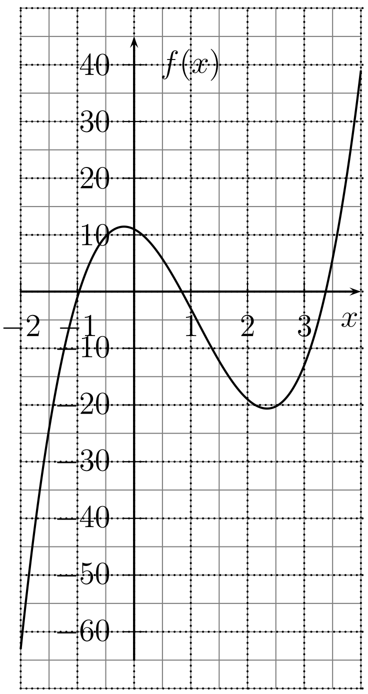
(b) Schallwellen, die von Menschen gehört werden können, haben in der Regel eine Frequenz zwischen 16 Hz und 20 000 Hz. Jemand behauptet, er habe neulich eine Schallwelle mit einer Schwingungsdauer von 0, 15 Millisekunden gehört. Glauben Sie ihm das, wenn er normal gut hören kann? (Berechnen Sie dazu die Frequenz des Tones!)

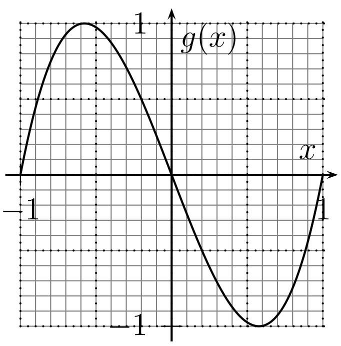
(c) Die Frequenz von Aktionspotentialen (=kurzen Spannungsimpulsen) wird als Maß für die Stärke einer Erregung gewählt. Wir messen den Abstand von Aktionspotentialen über einen festen Zeitraum von 100 Millisekunden. Der mittlere Abstand der Aktionspotentiale beträgt dabei 4 Millisekunden. Wie groß ist dann die Frequenz?

Aufgabe 4. Der Graph der Funktion

$$f(x) = 4x^3 - 13x^2 - 5x + 11$$

ist im linken Bild dargestellt:





Bestimmen Sie reelle Zahlen a, b, c und d, so dass die Funktion

$$g(x) := a \cdot f(b \cdot x + c) + d$$

einen Funktionsgraphen wie im rechten Bild hat!