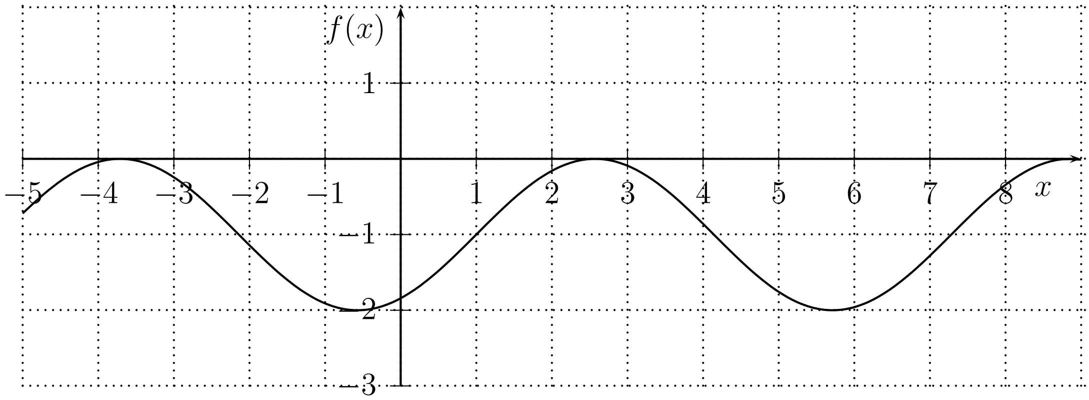
Probeklausur

Aufgabe 1.



Bestimmen Sie zu dem oben gezeichneten Funktionsgraphen die zugehörige Funktion f! Hier handelt es sich um eine linear skalierte Sinusfunktion, also eine Funktion der Form

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x) + d.$$

Geben Sie auch an, aus welchen Daten der Funktion Sie die *Parameter* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ bestimmt haben!

Angela Holtmann

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen! Schreiben Sie dazu zunächst den *Ansatz* für die Taylorreihe der Funktion hin und rechnen Sie sie dann aus! (Verwendet werden dürfen die Rechenregeln für Ableitungen und die Formeln für die Ableitungen Polynomfunktionen.) Geben Sie zu jedem Rechenschritt eine *Begründung* an!

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 9x^2 - 3x + 4$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := 23x^5 - 2x^4 + 5x - 3$

Angela Holtmann

Aufgabe 3. Gegeben seien die beiden Vektoren $(1, 2, 3)$ und $(4, 5, 6)$ im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass der Vektor $(-3, 6, -3)$ senkrecht auf den beiden zuerst genannten Vektoren steht!

- Verwendet werden kann hier ein *theoretisches Argument* aus der Vorlesung/den Übungen – das wäre dann anzugeben, und es wäre *nachzuweisen*, dass der dritte Vektor die Bedingungen für das Argument erfüllt.

- Alternativ kann man auch *direkt nachrechnen* – dann wäre zuvor auch die *Definition bzw. die Charakterisierung* für Orthogonalität zweier Vektoren anzugeben.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Tangentialebene an das Paraboloid

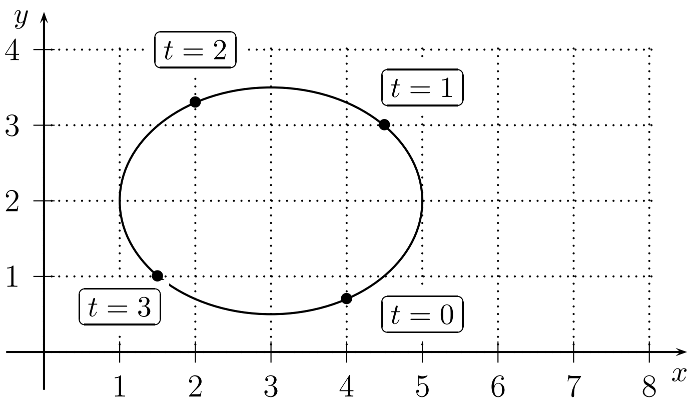
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4x^2 + 5y^2 - 7\}$$

in dem Punkt $(2, 1, 14)$. Geben Sie dazu auch den *Lösungsansatz* an!

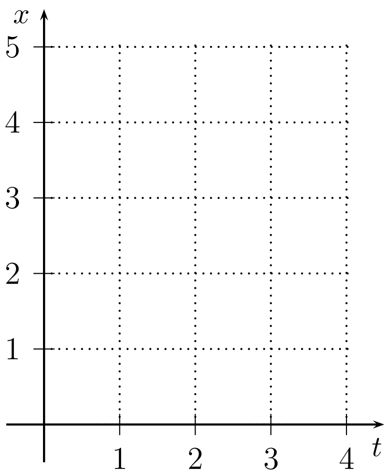
(Es reicht, *eine* der beiden Formen für Tangentialebenen (entweder paramatrisiert oder durch Gleichungen beschrieben) anzugeben.)

Aufgabe 5. Wir betrachten ein Haifisch-Beutefisch-System, das auf einer Kurve oszilliert, wobei die Anzahl der Haifische in y-Richtung, die der Beutefische in x-Richtung angegeben ist. Es sind einige Zeitpunkte ($t = 0, 1, 2, 3$) mit den zugehörigen Positionen markiert.

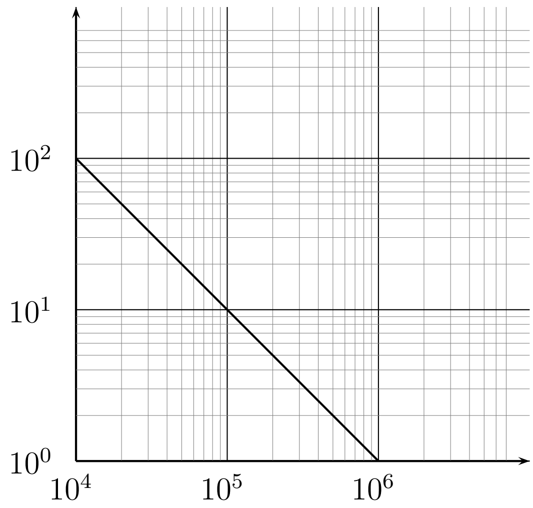
Zum Zeitpunkt $t = 4$ seien genauso viele Beutefische und genauso viele Haifische vorhanden wie zum Zeitpunkt $t = 0$.



Skizzieren Sie in dem untenstehenden t-x-Koordinatensystem die Populationsentwicklung der Beutefische (für $t \in [0, 4]$)!



Aufgabe 6. Welche Funktion ist in dem folgenden Koordinatensystem dargestellt?



Es sind (genügend viele – wieviele sind das?) *Punkte* am Funktionsgraphen abzulesen (und hinzuschreiben), der *Lösungsansatz* hinzuschreiben. Anschließend ist die *Lösung* zu berechnen – hierzu darf ein Taschenrechner verwendet werden.

Aufgabe 7. Berechnen Sie den Mittelwert der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^4$ auf dem Intervall $[2, 3]$.

Es darf verwendet werden, dass die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) := \frac{1}{5}x^5$ eine Stammfunktion zur Funktion f ist.

Angela Holtmann

Aufgabe 8.
Gegeben seien die drei Differentialgleichungen

a) $y'(t) = -t^2$

b) $y'(t) = \sin(t)$

c) $y'(t) = y(t)^2$

Ordnen Sie die Differentialgleichungen den auf der nächsten Seite abgebildeten Richtungsfeldern zu (mit *Begründung*)!

Bild 1

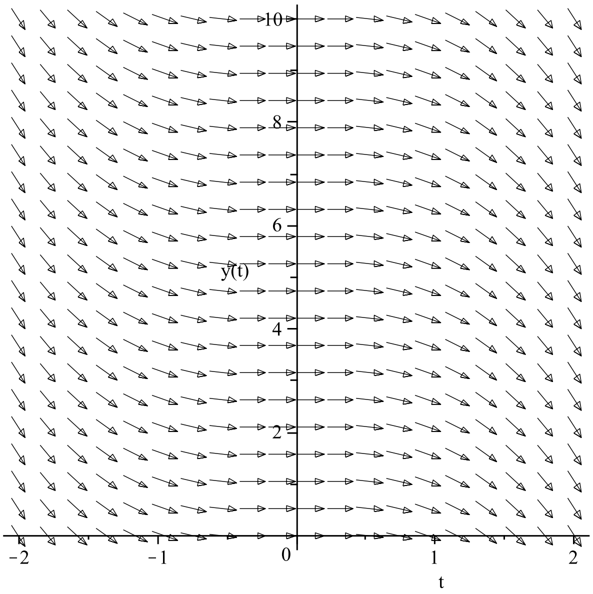


Bild 2

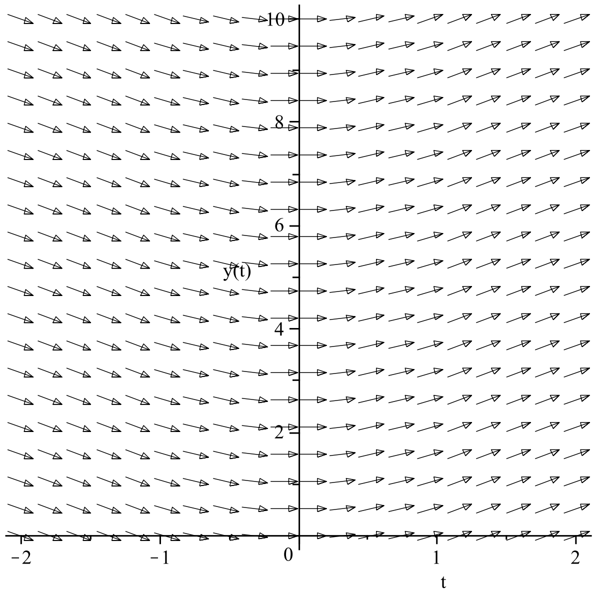
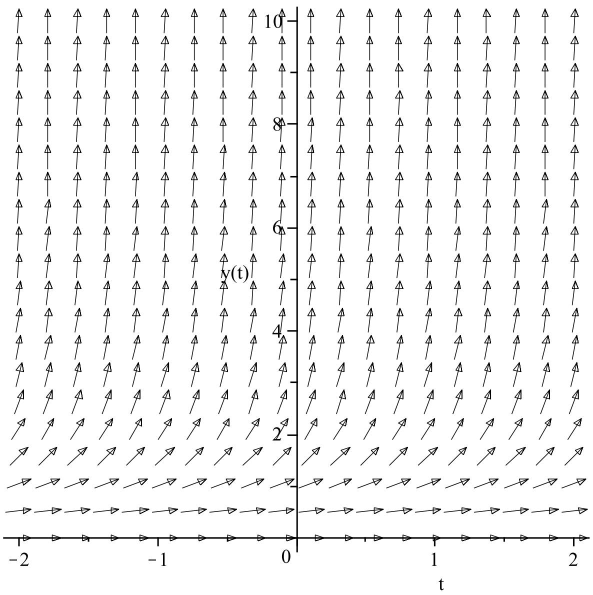


Bild 3



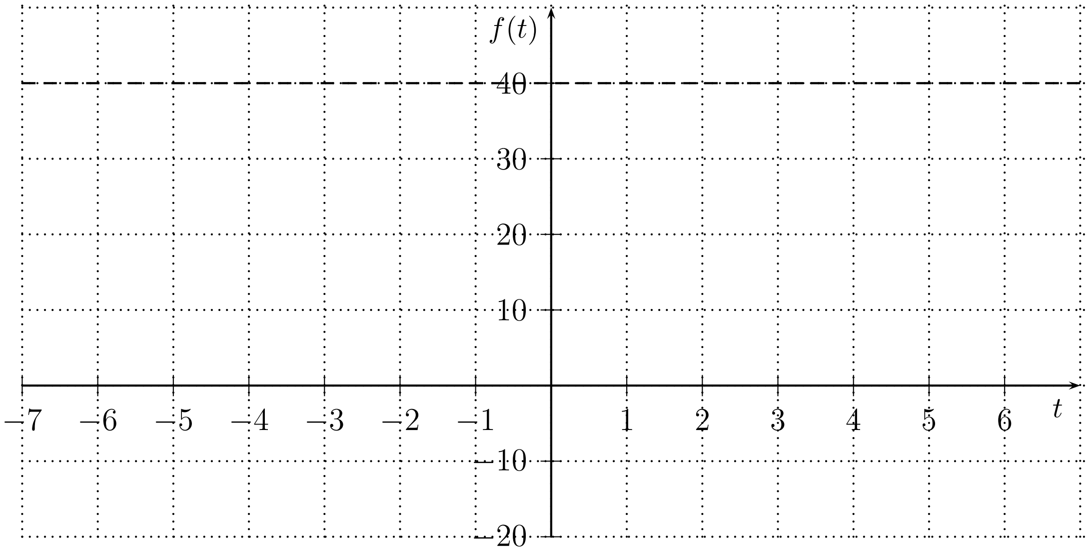
Aufgabe 9. Die Trommel einer Waschmaschine drehe sich mit einer Frequenz von 30 Hz. Der Radius der Trommel sei 40 cm. Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt auf dem Rand der Trommel (in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$)?

Hier ist ein *Lösungsansatz* anzugeben und anschließend die *Geschwindigkeit* zu bestimmen. Es darf verwendet werden, dass für einen Kreis mit Radius r der Kreisumfang gerade $2 \cdot \pi \cdot r$ ist.

Aufgabe 10. Ein See mit einer Größe von 200 m^2 wird von einem Unkraut überwachsen. Im Jahr 1960 bedeckte die Pflanze 20 m^2 des Sees. Der jährliche Zuwachs betrug 50 Prozent. Bis zu welchem Jahr dauerte es, bis der See vollständig vom Unkraut bedeckt war, wenn wir von exponentiellem Wachstum ausgehen?

Hier ist ein *Lösungsansatz* anzugeben und anschließend die *gesuchte Jahreszahl* (ggf. mit einem Taschenrechner) zu berechnen.

Aufgabe 11. Skizzieren Sie den Graphen einer logistischen Funktion $f(t)$ mit Wachstumsschranke $B = 40$ und $f(2) = 20$. (Achten Sie dabei insbesondere auf die Krümmung der Funktion!)



Aufgabe 12. Gegeben seien die Datenpaare

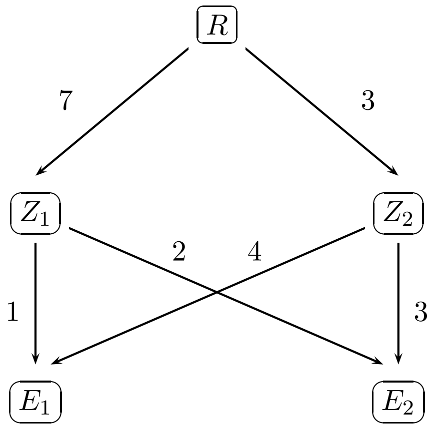
$$(x_1, y_1) = (1, 3), \quad (x_2, y_2) = (2, 3), \quad (x_3, y_3) = (3, 1) \quad \text{und} \quad (x_4, y_4) = (4, 1).$$

Bestimmen Sie die Konstanten a und b für die Regressionsgerade

$$f(x) = ax + b.$$

Geben Sie auch die dazu *verwendete Formel* an!

Aufgabe 13. Gegeben sei folgender Produktionsprozess. Aus einer Einheit eines Rohstoffs R werden die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 (in den jeweiligen Mengen) hergestellt, anschließend wird aus einer Einheit des jeweiligen Zwischenproduktes die angegebene Menge vom Endprodukt hergestellt.



Finden Sie eine Matrix, die den Gesamtprozess beschreibt, und berechnen Sie, wieviel von den beiden Endprodukten erzeugt werden kann, wenn am Anfang sechs Einheiten des Rohstoffs R zur Verfügung stehen!

Zu bestimmen sind also zwei Matrizen für die Einzelprozesse, und anschließend ist das *Produkt der beiden Matrizen* zu berechnen (und daraus dann die *Mengen der entstehenden Endprodukte* E_1 und E_2).

Aufgabe 14. Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Funktionswerten $f(5) = 5$ und $f(8) = 9$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, wenn f eine allgemeine Exponentialfunktion ist!

Schreiben Sie dazu zunächst den *Lösungsansatz* hin, und bestimmen Sie dann die beiden *Parameter* für die Exponentialfunktion!

Angela Holtmann

Aufgabe 15. Wie lang ist die Raumdiagonale eines Würfels mit Kantenlänge 7 cm? Geben Sie eine *kurze Begründung* (evtl. mit Zeichnung) für Ihr Ergebnis an!

Angela Holtmann