(1.15) Homomorphiesatz für Gruppen.

Seien $(G,\circ)$ und $(H,*)$ Gruppen und $f: G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt $G/_{\mathrm{Ker}\, f} \cong \mathrm{Bild}\, f$.

Beweis: Wir definieren eine Abbildung

$\varphi: G/_{\mathrm{Ker}\, f} \to \mathrm{Bild}\, f \quad g \circ \mathrm{Ker}\, f \mapsto f(g)$ und zeigen,

dass sie ein Isom. ist.

1. φ ist Abb.: Sei $g \circ \mathrm{Ker}\, f = h \circ \mathrm{Ker}\, f$. Dann ist $h^{-1} \circ g \in \mathrm{Ker}\, f$. Setze $k := h^{-1} \circ g$.

$k \in \mathrm{Ker}\, f$ und daher $\varphi(h \circ \mathrm{Ker}\, f) \underset{h = g\circ k^{-1}}{=} f(g \circ k^{-1}) = f(g) * f(k^{-1}) = f(g) * e_H$

$= f(g) = \varphi(g \circ \mathrm{Ker}\, f)$.

2. φ ist Homo: $\varphi(g_1 \circ \mathrm{Ker}\, f \,\square\, g_2 \circ \mathrm{Ker}\, f) = \varphi((g_1 \circ g_2) \circ \mathrm{Ker}\, f)$

$= f(g_1 \circ g_2) \underset{f \text{ Homo}}{=} f(g_1) * f(g_2) = \varphi(g_1 \circ \mathrm{Ker}\, f) * \varphi(g_2 \circ \mathrm{Ker}\, f)$

3. φ ist injektiv: Sei $\varphi(g \circ \mathrm{Ker}\, f) = \varphi(h \circ \mathrm{Ker}\, f) \Rightarrow$

$f(g) = f(h)$. Daher $f(h^{-1} \circ g) = f(h^{-1}) * f(g) = f(h)^{-1} * f(g) = e_H$

Also ist $k := h^{-1} \circ g \in \mathrm{Ker}\, f$ und $g = h \circ k$. Daraus folgt

$g \circ \mathrm{Ker}\, f = (h \circ k) \circ \mathrm{Ker}\, f = h \circ (k \circ \mathrm{Ker}\, f) = h \circ \mathrm{Ker}\, f$.

4. φ ist surjektiv. Sei $h \in \mathrm{Bild}\, f$. Dann gibt es $g \in G$ mit $h = f(g)$. Es folgt $\varphi(g \circ \mathrm{Ker}\, f) = f(g) = h$.

Also ist φ ein Isomorphismus.

$\square$