1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1.1. (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen. Geben Sie jeweils den Real- und Imaginärteil, sowie den Betrag und das Argument an.

a) $\dfrac{6}{3-4i}$

b) $(1+i)^n + (1-i)^n$ für alle $n > 0$

c) alle z mit $z^3 = 1$.

Aufgabe 1.2. (5 Punkte) Sei $\mathbb{R}[t]$ der Ring der Polynome mit reellen Koeffizienten in einer Variablen t und $\langle 1+t^2 \rangle$ das Ideal erzeugt von dem Polynom $1+t^2$. Das bedeutet, dass $\langle 1+t^2 \rangle$ alle Polynome der Form $(1+t^2)q(t)$ für $q(t) \in \mathbb{R}[t]$ enthält.
Zeigen Sie, dass der Quotient $\mathbb{R}[t]/\langle 1+t^2 \rangle$ zum Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ isomorph ist.

Aufgabe 1.3. (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{und} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\,.$$

b) Es sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C}$ mit $\overline{a}z \neq 1$ gilt

$$|z| < 1 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \left| \frac{z-a}{\overline{a}z - 1} \right| < 1\,.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $|1 - z\overline{a}|^2 - |z-a|^2 = (1-|z|^2)(1-|a|^2)$.

Aufgabe 1.4. (5 Punkte) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen in der komplexen Ebene. Entscheiden Sie jeweils, ob die Menge offen/abgeschlossen/kompakt ist in $\mathbb{C}$. Ist die Menge auch offen/abgeschlossen in der Riemannschen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$?

a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) < 1\}$

b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) \leq 1\}$

c) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\}$