7. Aufgabenblatt

Aufgabe 7.1. (5 Punkte) Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine glatte geschlossene Kurve, Γ die Bildmenge und $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. In der Vorlesung wurde im Spezialfall $a = 0$ gezeigt, dass die Windungszahl eine ganze Zahl ist. Geben Sie einen Beweis für beliebiges $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Aufgabe 7.2. (5 Punkte) Seien $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ glatte geschlossene Kurven mit demselben Startpunkt. Zeigen Sie, dass γ_1 und γ_2 genau dann homotop in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind, wenn $w(\gamma_1, 0) = w(\gamma_2, 0)$.

Aufgabe 7.3. (10 Punkte) Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ eine glatte geschlossene Kurve, Γ die Bildmenge, $\epsilon > 0$ und $0 < t_* < 1$, sodass

(i) $\gamma'(t_*) \neq 0$,

(ii) $\gamma(t_*) \notin \gamma([0,1] \setminus \{t_*\})$ und

(iii) $\gamma(t_*) + i\lambda\gamma'(t_*) \notin \Gamma$ für alle $\lambda \in [-\epsilon, \epsilon] \setminus \{0\}$.

Seien $a_\pm := \gamma(t_*) \pm i\epsilon\gamma'(t_*)$.

a) Erklären Sie die geometrische Bedeutung von (ii).

b) Erklären Sie die geometrische Bedeutung von (iii).

Sei $\delta > 0$, sodass $[t_* - \delta, t_* + \delta] \subseteq [0,1]$ und

$$|t - t_*| < \delta \implies \gamma(t) = \gamma(t_*) + (t - t_*)\gamma'(t_*)\,.$$

c) Erklären Sie, dass für $a_\pm^\lambda := \gamma(t_*) \pm i\lambda\gamma'(t_*)$ mit $0 < \lambda \leq \epsilon$ gilt $w(\gamma, a_\pm) = w(\gamma, a_\pm^\lambda)$.

d) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{\gamma'(t)(a_+^\lambda - a_-^\lambda)}{(\gamma(t) - a_+^\lambda)(\gamma(t) - a_-^\lambda)} = 0$ für $t \notin [t_* - \delta, t_* + \delta]$.

e) Zeigen Sie, dass $w(\gamma, a_+) - w(\gamma, a_-) = 1$.