12. Aufgabenblatt

Aufgabe 12.1. (5 Punkte) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten (d.h. Punkte a, an denen die Funktion nicht definiert ist) und entscheiden Sie, ob es sich um eine hebbare Singularität, einen Pol oder eine wesentliche Singularität handelt. Wenn es sich um einen Pol handelt, bestimmen Sie die Ordnung des Polstelle.

a) $\dfrac{(z^2 - \pi^2)z}{(\cos z)^2 - 1}$

b) $\dfrac{1}{\exp(z) + \exp\left(\frac{1}{z}\right)}$

Aufgabe 12.2. (5 Punkte) Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ auf den jeweils angegebenen offenen Kreisringen

$$K_{z_0}(r, R) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, r < |z - z_0| < R\}$$

in eine Laurentreihe.

a) $K_0(0, 1)$

b) $K_0(1, 2)$

c) $K_0(2, \infty)$

d) $K_1(0, 1)$

Aufgabe 12.3. (5 Punkte) Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $f\colon \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in a einen Pol der Ordnung m besitzt. Sei g die holomorphe Fortsetzung von $(z-a)^m f(z)$ nach a. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0)\,.$$

Aufgabe 12.4. (5 Punkte) Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer Nullstelle in $a \in \Omega$ mit der Vielfachheit $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Res}(\frac{f'}{f}, a) = n\,.$$