Prof. Dr. Etienne Emmrich
Universität Bielefeld

Wintersemester 2010/11

Evolutionsgleichungen und Anwendungen

1. Übungsblatt

Abgabe vor der Übung am 27.10.2010

Aufgabe 1.1

Bestimme eine Lösung des Problems

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,, & 0 < x < 1\,,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \\ u(x,0) = u_0(x)\,, \end{cases}$$

mit

(i) $u_0(x) = \min(x, 1-x)$,

(ii) $u_0(x) = x(1-x)$.

Aufgabe 1.2

Beweise, daß für jede (genügend glatte) Lösung u der Wärmeleitgleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen, also

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{für } 0 < x < 1\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{für } t > 0\,, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in (0,1)\,, \end{cases}$$

die Abschätzung

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx \le \int_0^1 u_0^2(x)dx \qquad \text{für } t \ge 0$$

gilt.

Hinweis: Betrachte die Ableitung des Energiefunktionals $E(t) := \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,t)dx$.

Aufgabe 1.3

Löse die Wärmeleitgleichung für homogene Neumann-Randbedingungen, d. h.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Zeige, daß der Mittelwert der Lösung für $t > 0$ konstant bleibt und daß für jedes $x \in (0,1)$ die Lösung $u = u(x,t)$ gegen den Mittelwert konvergiert für $t \to \infty$.
Wie paßt dies zur physikalischen Interpretation?