Prof. Dr. Etienne Emmrich
Universität Bielefeld

Wintersemester 2010/11

Evolutionsgleichungen und Anwendungen

2. Übungsblatt

Abgabe vor der Übung am 10.11.2010

Aufgabe 2.1

(i) Zeige, daß $g(t) = t \cos \frac{\pi}{2t}$ ($t \in (0, 1]$) mit $g(0) = 0$ auf $[0, 1]$ zwar stetig, nicht aber absolut stetig ist.

(ii) Finde eine Funktion, die zwar absolut stetig, nicht aber Lipschitz-stetig ist.

(iii) Zeige, daß Summe, Differenz, Produkt und Quotient (mit Nenner ungleich Null) absolut stetiger Funktionen wieder absolut stetig ist.

Aufgabe 2.2

Sei

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x \le t, \\ 0 & \text{für } t < x \le 1. \end{cases}$$

Wir betrachten u als abstrakte Funktion mit Werten in $X = L^2(0,1)$. Untersuche auf Bochner-Meßbarkeit, (absolute) Stetigkeit und (klassische) Differenzierbarkeit.

Aufgabe 2.3

Beweise den Weierstraßschen Approximationssatz für $\mathcal{C}([0,T];X)$, wenn X ein beliebiger Banach-Raum ist.

Aufgabe 2.4

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum. Zeige, daß $\mathcal{C}^1([0,T];X)$, versehen mit

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \left(\|u(t)\| + \|u'(t)\|\right),$$

ein Banach-Raum ist.