Prof. Dr. Etienne Emmrich
Universität Bielefeld

Wintersemester 2010/11

Evolutionsgleichungen und Anwendungen

4. Übungsblatt

Abgabe am 24.11.2010

Aufgabe 4.1

Beweise das folgende Korollar aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung: Sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,T;X)$ und gelte

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(0,T)\,.$$

Dann ist u fast überall gleich einer Konstanten.

Aufgabe 4.2

(i) Zeige, daß $W^{1,1}(0,T;X)$, versehen mit der Standardnorm, ein Banach-Raum ist.

(ii) Zeige, daß $\mathcal{W}(0,T)$, versehen mit der Standardnorm, ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 4.3

(i) Was versteht man unter Mittelungskern und Mittelfunktion (Regularisierung, "mollifier and mollification")?

(ii) Zeige, daß $\mathcal{C}^\infty([0,T];V)$ dicht in $\mathcal{W}(0,T)$ liegt.

Aufgabe 4.4

Sei $V \subseteq H \subseteq V^*$ ein Gelfand-Dreier. Zeige, daß die Regel der partiellen Integration

$$\int_s^t \big(\langle u'(\tau), v(\tau)\rangle + \langle u(\tau), v'(\tau)\rangle\big)\, d\tau = (u(t),v(t)) - (u(s),v(s)), \quad 0 \le s \le t \le T$$

für Funktionen $u, v \in \mathcal{C}^1([0,T];V)$ gilt.