

Evolutionsgleichungen und Anwendungen

5. Übungsblatt

Abgabe am 15.12.2010

Aufgabe 5.1

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum. Sei $u \in L^p(0, T; X)$ ($p \in [1, \infty)$) auf ganz $\mathbb{R}$ mit Null fortgesetzt (und die Fortsetzung weiter mit u bezeichnet). Unter dem *Steklov-Mittel* $S_h u$ ($h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) von u versteht man

$$(S_h u)(t) := \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zeige, daß $S_h u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$, $\|S_h u\|_{L^p(0, T; X)} \leq \|u\|_{L^p(0, T; X)}$ sowie $S_h u \rightarrow u$ in $L^p(0, T; X)$ für $h \rightarrow 0$.

Wer war Steklov?

Aufgabe 5.2

Sei $V \subseteq H \subseteq V^*$ ein Gelfand-Dreier. Vorgelegt seien Folgen $\{u_{0n}\} \subset H$ und $\{f_n\} \subset L^2(0, T; V^*)$ mit $u_{0n} \rightarrow u_0$ in H und $f_n \rightarrow f$ in $L^2(0, T; V^*)$ für $n \rightarrow \infty$. Unter den Standardvoraussetzungen and die Form $a(\cdot; \cdot, \cdot)$ besitzt das Problem (P) genau eine Lösung $u_n \in \mathcal{W}(0, T)$ zu den Daten (u_{0n}, f_n) . Zeige, daß $\{u_n\}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen ein $u \in \mathcal{W}(0, T)$ konvergiert und daß u Lösung von (P) zu den Daten (u_0, f) ist.

Aufgabe 5.3

Beweise die aus der Vorlesung bekannten A-priori-Abschätzungen für das Problem (P) für den Fall, daß die Form $a(\cdot; \cdot, \cdot)$ nicht stark positiv ist, wohl aber einer Gårdingschen Ungleichung genügt (daß also $\kappa \neq 0$).

Aufgabe 5.4

Leite A-priori-Abschätzungen für das zeitdiskrete Problem (P_τ) für den Fall her, daß die Form $a(\cdot; \cdot, \cdot)$ nicht stark positiv ist, wohl aber einer Gårdingschen Ungleichung genügt (daß also $\kappa \neq 0$).