Prof. Dr. Etienne Emmrich
Universität Bielefeld

Wintersemester 2010/11

Evolutionsgleichungen und Anwendungen

6. Übungsblatt

Abgabe am 22.12.2010

Aufgabe 6.1

(a) Der Banach-Raum V sei stetig und dicht im Hilbert-Raum H eingebettet. Zeige, daß es dann zu jedem $u_0 \in H$ stets eine Folge $\{u_\ell^0\} \subset V$ gibt, so daß es eine Konstant $c > 0$ gibt und für alle $\ell \in \mathbb{N}$

$$\tau_\ell \, \|u_\ell^0\|^2 \leq c \tag{1}$$

gilt und ferner

$$u_\ell^0 \to u_0 \text{ in } H \text{ für } \ell \to \infty \,.$$

(b) Zeige, daß die Folge $\{\hat{u}_\ell\}$ der stückweise linear Interpolierenden (siehe Vorlesung) unter der Bedingung (1) in $L^p(0,T;V)$ beschränkt ist und es also eine Teilfolge gibt, die in $L^p(0,T;V)$ schwach gegen u konvergiert. (Dabei beizeichne u den in der Vorlesung bereits betrachteten Grenzwert.)

Aufgabe 6.2

Seien X, Y Banach-Räume und sei $B : X \to Y$ ein linearer beschränkter Operator. Was versteht man unter dem dualen (adjungierten) Operator? Zeige, daß der duale Operator ebenfalls linear und beschränkt ist. Zeige, daß B schwach-schwach-stetig ist, d. h., aus $x_n \rightharpoonup x$ in X folgt $Bx_n \rightharpoonup Bx$ in Y.

Aufgabe 6.3

Verallgemeinere die aus der Vorlesung bekannte Fehlerabschätzung auf den Fall $\kappa \neq 0$.