

Evolutionsgleichungen und Anwendungen

7. Übungsblatt

Abgabe am 11.01.2011

Aufgabe 7.1

Neben dem impliziten Euler-Verfahren wird gern auch die *zweischrittige Formel der rückwärtigen Differenzen* (BDF 2, Backward differentiation formula) betrachtet. Für eine übliche äquidistante Zerlegung beruht das Verfahren auf der Approximation

$$u'(t_n) \approx \frac{1}{\tau} \left(\frac{3}{2} u(t_n) - 2 u(t_{n-1}) + \frac{1}{2} u(t_{n-2}) \right).$$

- (a) Welche Aussagen findet man über das Verfahren in der einschlägigen Literatur zur Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen? (siehe etwa die Bücher von Hairer & Wanner, Stuart & Humphries, Strehmel & Weiner)
- (b) Beweise die Formel

$$4 \left(\frac{3}{2} a - 2b + \frac{1}{2} c \right) \cdot a = a^2 + (2a - b)^2 - b^2 - (2b - c)^2 + (a - 2b + c)^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- (c) Übertrage die aus der Vorlesung bekannten Ergebnisse zum impliziten Euler-Verfahren auf die BDF 2 unter Verwendung der Formel aus (b), insbesondere Existenz und Einzigkeit von Lösungen des zeitdiskreten Ersatzproblems, A-priori- und Stabilitätsabschätzungen, Fehlerabschätzungen.