Evolutionsgleichungen und Anwendungen

8. Übungsblatt

Abgabe am 25.01.2011

Aufgabe 8.1

Zeige, unter geeigneten Voraussetzungen, die Beziehung

$$\frac{d}{dt}a(t; u(t), u(t)) = a'(t; u(t), u(t)) + 2a(t; u(t), u'(t)).$$

Aufgabe 8.2

Verallgemeinere die aus der Vorlesung bekannten A-priori-Abschätzungen für Evolutionsgleichungen zweiter Ordnung auf den Fall, daß die zugrunde liegende Form nur einer Gärdingschen Ungleichung genügt.

Aufgabe 8.3

Das Zeitintervall $[0, T]$ sei äquidistant zerlegt mit den Abszissen $t_n = n\tau$ ($n = 0, 1, \dots, N$). Betrachte ausgehend von der Approximation

$$u''(t_n) \approx \frac{u(t_{n+1}) - 2u(t_n) + u(t_{n-1}))}{\tau^2}$$

eine Zeitdiskretisierung des Anfangswertproblems für eine lineare Evolutionsgleichung zweiter Ordnung (ohne Dämpfung). Beweise die Lösbarkeit des diskreten Ersatzproblems, leite A-priori-Abschätzungen für die zeitdiskrete Lösung her und beweise die Existenz von Lösungen des Ausgangsproblems durch den Nachweis der (schwachen bzw. schwach*) Konvergenz einer Folge von Näherungslösungen.

Aufgabe 8.3

Kombiniere für das Anfangswertproblem für eine Evolutionsgleichung erster Ordnung (unter den Standardvoraussetzungen) das implizite Euler-Verfahren mit einer Galerkin-Approximation. Beweise die Konvergenz dieser vollen Diskretisierung gegen die exakte Lösung. Kann der Konvergenzbeweis auch für die Kombination aus explizitem Euler-Verfahren mit einer Galerkin-Approximation geführt werden, wenn man die Zeitschrittweite geeignet an die Dimension des Galerkin-Unterraumes koppelt?