Prof. Dr. Etienne Emmrich
Universität Bielefeld Sommersemester 2010

Nichtlineare Funktionalanalysis und Differentialgleichungen

1. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 29. April 2010

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Für $x \in \mathbb{R}^d$ sei

$$\phi(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-|x|^2}), & \text{falls } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $|\cdot|$ die übliche euklidische Norm in $\mathbb{R}^d$ sei. Zeige, daß $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Zusatzaufgabe 1: **Eine Flasche Sekt**

Finde eine $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$-Funktion, die fundamental von der in der ersten Aufgabe definierten verschieden ist, die also nicht nur Summe oder Produkt mit Polynomen, trigonometrischen Funktionen oder Ableitung etc. von dieser Funktion ist.

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Seien $u, v \in H^1(a,b)$. Beweise die Produktregel $(uv)' = uv' + u'v$.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$ und gelte für alle $\phi \in C_0^\infty(a,b)$

$$\int_a^b u(x)\phi'(x)dx = 0.$$

Zeige, daß es dann eine reelle Konstante c gibt, so daß $u(x) = c$ für fast alle $x \in [a,b]$.

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Sei $u \in H^1(a,b)$. Zeige, daß dann u außerhalb von (a,b) konstant als stetige Funktion fortgesetzt werden kann und deshalb

$$D_h u(x) := \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

wohldefiniert ist für $h \neq 0$ und $x \in (a,b)$. Zeige, daß $D_h u$ in $L^2(a,b)$ gegen u' konvergiert.