Prof. Dr. Etienne Emmrich
Universität Bielefeld

Sommersemester 2010

# Nichtlineare Funktionalanalysis und Differentialgleichungen

## 10. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 22. Juli 2010

**Aufgabe 1:** **3 Punkte**

Genüge $f = f(x, u_1, u_2, \ldots, u_n) : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(i) einer Carathéodory-Bedingung:

$$x \mapsto f(x, u_1, \ldots, u_n)$$

ist auf $\Omega$ Lebesgue-meßbar für alle $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ und

$$u_i \mapsto f(x, u_1, \ldots, u_n)$$

ist auf $\mathbb{R}$ für fast alle $x \in \Omega$ stetig, $i = 1, \ldots, n$.

(ii) einer Wachstumsbedingung: Es gibt $p_i$, $q \in [1, \infty)$, $i = 1, \ldots, n$, $b > 0$ und nichtnegatives $a \in L^q(\Omega)$, so daß

$$|f(x, u_1, \ldots, u_n)| \leq a(x) + b \sum_{i=1}^{n} |u_i|^{p_i/q}.$$

Zeige, daß dann der Nemyzki-Operator $F$ mit $(Fu)(x) := f(x, u_1(x), \ldots, u_n(x))$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$ eine Abbildung von $\prod_{i=1}^{n} L^{p_i}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ ist und daß $F$ stetig und beschränkt ist mit

$$\|Fu\|_{0,q} \leq const \left( \|a\|_{0,q} + \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{0,p_i}^{p_i/q} \right).$$

**Aufgabe 2:** **3 Punkte**

Beweise für einen reellen, separablen Hilbertraum den Satz von Lax-Milgram mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens.

**Aufgabe 3:** **3 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein glatt berandetes, beschränktes Gebiet. Zeige, daß für $2 \leq p < \infty$ der $p$-Laplace-Operator $A$, der durch

$$\langle Au, v \rangle := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad u, v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ gegeben ist, wohldefiniert ist, in $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$ abbildet sowie strikt monoton, koerzitiv, beschränkt und radialstetig ist.