Prof. Dr. Etienne Emmrich
Universität Bielefeld

Sommersemester 2010

Nichtlineare Funktionalanalysis und Differentialgleichungen

2. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 6. Mai 2010

Aufgabe 1: **2 Punkte**

(a) Zeige, daß für $v \in L^2(a,b)$ gilt:

$$\|v\|_{-1,2} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|v\|_{0,2} \,.$$

(b) Zeige, daß für $v \in H^1(a,b)$

$$\|v\|_{0,2} \leq \frac{b-a}{2} |v|_{1,2} + \sqrt{b-a}\, |\overline{v}|$$

gilt, wobei $\overline{v} := (b-a)^{-1} \int_a^b v(\xi) d\xi$ ist.

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Wir wissen, daß es für jedes $f \in H^{-1}(a,b)$ eine Funktion $u_f \in L^2(a,b)$ gibt, so daß

$$\langle f, v \rangle = -\int_a^b u_f(x) v'(x) dx, \quad v \in H_0^1(a,b),$$

gilt. Führe die Berechnung von $\|f\|_{-1,2}$ auf die von $\|u_f\|_{0,2}$ zurück.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein geeignetes, beschränktes Gebiet und

$$L_0^2 := \{v \in L^2(\Omega) \mid \int_\Omega v(x) dx = 0\}.$$

Wir versehen $L_0^2(\Omega)$ mit der üblichen L^2-Norm. (Dieser Raum ist in der Theorie der Navier-Stokes-Gleichungen von Bedeutung, bei der der Druck eines Fluids nur bis auf eine Konstante bestimmt ist.) Es sei weiterhin $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ der übliche Quotientenraum, versehen mit der Quotientennorm:

$$\|[u]\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} = \inf_{v \in [u]} \|u\|_{0,2}.$$

Zeige, daß $L_0^2(\Omega)$ und $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ isometrisch isomorph sind,

$$L_0^2(\Omega) \cong L^2(\Omega)/\mathbb{R}.$$

Zeige weiterhin, daß $L_0^2(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\Omega)$ ist.

Aufgabe 4: **1 Punkt**

Zeige, daß $C_0^\infty(a,b)$ nicht dicht ist in $H^1(a,b)$.