

Nichtlineare Funktionalanalysis und Differentialgleichungen

4. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 27. Mai 2010

Aufgabe 1:

2 Punkte

Sei

$$a(u, v) := \int_a^b (u'(x)v'(x) + c(x)u'(x)v(x) + d(x)u(x)v(x))dx, \quad u, v \in H_0^1(a, b).$$

Unter welchen Voraussetzungen an die Koeffizienten ist der zu a gehörende Operator $A : H_0^1(a, b) \rightarrow H^{-1}(a, b)$ symmetrisch? Wie lautet der duale Operator im nichtsymmetrischen Fall?

Aufgabe 2:

2 Punkte

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} -u''(x) + ku'(x) + u(x) = f(x), & x \in (a, b), \\ u'(a) = u'(b) = 0. \end{cases}$$

Bestimme einen Wert für $k \in \mathbb{R}$, so daß die zugehörige Bilinearform aus der schwachen Formulierung nicht positiv ist.

Aufgabe 3:

3 Punkte

Sei V ein Banachraum. Zeige:

(i) Ist $1 < p < 2$ und $\mu > 0$, so gibt es keinen Operator $A : V \rightarrow V^*$ mit

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \mu \|u - v\|^p, \quad u, v \in V.$$

(ii) Ist $p > 2$, $\beta > 0$ und $A : V \rightarrow V^*$ ein Operator mit

$$\|Au - Av\|_* \leq \beta \|u - v\|^{p-1}, \quad u, v \in V,$$

so ist A konstant.