

## Nichtlineare Funktionalanalysis und Differentialgleichungen

### 4. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 27. Mai 2010

#### Aufgabe 1:

2 Punkte

Sei

$$a(u, v) := \int_a^b (u'(x)v'(x) + c(x)u'(x)v(x) + d(x)u(x)v(x))dx, \quad u, v \in H_0^1(a, b).$$

Unter welchen Voraussetzungen an die Koeffizienten ist der zu  $a$  gehörende Operator  $A : H_0^1(a, b) \rightarrow H^{-1}(a, b)$  symmetrisch? Wie lautet der duale Operator im nichtsymmetrischen Fall?

#### Aufgabe 2:

2 Punkte

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} -u''(x) + ku'(x) + u(x) = f(x), & x \in (a, b), \\ u'(a) = u'(b) = 0. \end{cases}$$

Bestimme einen Wert für  $k \in \mathbb{R}$ , so daß die zugehörige Bilinearform aus der schwachen Formulierung nicht positiv ist.

#### Aufgabe 3:

3 Punkte

Sei  $V$  ein Banachraum. Zeige:

- (i) Ist  $1 < p < 2$  und  $\mu > 0$ , so gibt es keinen Operator  $A : V \rightarrow V^*$  mit

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \mu \|u - v\|^p, \quad u, v \in V.$$

- (ii) Ist  $p > 2$ ,  $\beta > 0$  und  $A : V \rightarrow V^*$  ein Operator mit

$$\|Au - Av\|_* \leq \beta \|u - v\|^{p-1}, \quad u, v \in V,$$

so ist  $A$  konstant.