

Nichtlineare Funktionalanalysis und Differentialgleichungen

5. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 10. Juni 2010

Aufgabe 1:

3 Punkte

Untersuche für $\alpha \in \mathbb{R}$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) + \alpha \sin(u(x)) u'(x) &= f(x), & x \in (a, b), \\ u(a) = u(b) &= 0 \end{aligned}$$

auf schwache Lösbarkeit.

Aufgabe 2:

2 Punkte

Sei $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ periodisch mit Periode 1. Zeige, daß dann die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n(x) := f(nx)$$

schwach* in $L^\infty(\mathbb{R})$ gegen die konstante Funktion

$$\bar{f} \equiv \int_0^1 f(x) dx$$

konvergiert.

Aufgabe 3:

3 Punkte

Sei X ein reflexiver Banachraum und (x_n) eine Folge in X , (f_n) eine Folge im Dualraum X^* . Zeige:

- (a) Aus $x_n \rightharpoonup x$ in X und $f_n \rightarrow f$ in X^* folgt $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.
- (b) Aus $x_n \rightarrow x$ in X und $f_n \xrightarrow{*} f$ in X^* folgt $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.
- (c) Die Behauptung $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ gilt nicht, falls nur $x_n \rightharpoonup x$ in X und $f_n \xrightarrow{*} f$ in X^* .

Aufgabe 4:

3 Punkte

Sei V ein Hilbertraum und (x_n) eine Folge in V . Zeige, daß aus $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ auch $x_n \rightarrow x$ in V folgt. Angenommen, V ist lediglich ein Banach- und kein Hilbertraum. Unter welcher Voraussetzung kann dann die Aussage aufrecht erhalten werden?