Prof. Dr. Etienne Emmrich
Universität Bielefeld

Sommersemester 2010

# Nichtlineare Funktionalanalysis und Differentialgleichungen

## 7. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 24. Juni 2010

**Aufgabe 1:** **2 Punkte**

Sei $V$ ein reeller, separabler, reflexiver Banachraum. Der Operator $A : V \to V^*$ erfülle die Voraussetzungen des Hauptsatzes über monotone Operatoren von Browder und Minty. Zeige:

(i) Ist $A$ sogar stark monoton, so ist $A^{-1}$ Lipschitz-stetig.

(ii) Ist $A$ sogar stark monoton und Lipschitz-stetig, so ist $A^{-1}$ stark monoton.

**Aufgabe 2:** **1 Punkt**

Sei $V$ ein reeller, reflexiver Banachraum und $A : V \to V^*$. Wir nennen hier $A$ Gâteaux-differenzierbar[1], falls es einen Operator $A' : V \to \mathcal{L}(V, V^*)$ gibt, so daß für beliebige $u, v, w \in V$ gilt

$$\langle A'(u)v, w\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{\langle A(u + tv) - A(u), w\rangle}{t}.$$

Zeige: Ist $A$ linear, so ist $A$ Gâteaux-differenzierbar und $A'$ ist konstant. Wie verhält es sich mit der Umkehrung?

**Aufgabe 3:** **ausnahmsweise 6 Punkte**

(i) Seien $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1) \text{ und } |y| \leq x^\alpha\}$ und sei $u(x, y) := x^\beta$. Für welche $\beta$ gilt $u \in L^p(\Omega)$?

(ii) Drücke den Laplace-Operator $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ in Zylinderkoordinaten aus.

(iii) Sei $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ glatt und radialsymmetrisch, d.h. $u = u(|x|)$. Berechne $\Delta u$.

(iv) Wir betrachten die Einheitskugel $B_d := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}$ im $\mathbb{R}^d$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichne. Für welche Parameter $\alpha > 0$, $p \geq 1$ gilt für die Funktion

$$u : B_d \to \mathbb{R}, \quad u(x) := \begin{cases} |x|^{-\alpha}, & \text{falls} \quad |x| \neq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die Aussage $u \in L^p(B_d)$?

[1] Dies ist die Gâteaux-Ableitung bezüglich der schwach*-Topologie in $V^*$.

(v) Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ das durch die Eckpunkte $(1,2), (4,3)$ und $(2,4)$ gegebene Dreieck. Führe die Integration einer Funktion $u : \Delta \to \mathbb{R}$ auf jene über dem Einheitsdreieck $\hat{\Delta} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0,1], 0 < y < 1-x\}$ zurück. (Hinweis: Benutze eine affin-lineare Transformation.)
Integriere sodann die Funktion $u : \Delta \to \mathbb{R}$, $u(x,y) = x^2 + 2xy$ über $\Delta$.