Räume der Analysis, Funktionalanalysis und Differentialgleichungen

Eine kleine Zusammenstellung

Filip Rindler

4. Mai 2007

Im Folgenden ist immer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Setze $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $\mathbb{N}$ bezeichnet die natürlichen Zahlen *mit Null*; ist die Null explizit ausgeschlossen, so steht $\mathbb{N}^*$. d-Intervalle ($d \in \mathbb{N}^*$) sind als d-Quader zu verstehen. $\alpha \in \mathbb{N}^d$ steht immer für einen Multiindex zur Dimension $d \in \mathbb{N}^*$. „const" bezeichnet eine generische Konstante. Außerdem $\frac{1}{\infty} := 0$ und $\frac{1}{0} := \infty$.

Die Angaben basieren hauptsächlich auf D. Werner: *Funktionalanalysis*, 5. Aufl., Springer 2005, E. Emmrich: *Gewöhnliche- und Operator-Differentialgleichungen*, Vieweg 2004 und K. Atkinson, W. Han: *Theoretical Numerical Analysis*, Sec. Ed., Texts in Applied Mathematics 39, Springer 2005.

Hinweise auf Fehler und Anregungen bitte an `rindler@math.tu-berlin.de`.

Inhaltsverzeichnis

1 Folgenräume

1.1 Raum der Nullfolgen c_0

Definition:

$$c_0 := \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \right\}$$
$$\|x\|_{c_0} := \|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$$

Eigenschaften: Banachraum, separabel, *nicht* reflexiv.
Dualraum: $(c_0)^* \cong \ell^1$ (via $T : \ell^1 \to (c_o)^*$ mit $(Tx)(y) := \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k \overline{y}_k$).

1.2 p-summierbare Folgen ℓ^p, $1 \leq p < \infty$

Definition:

$$\ell^p := \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p < \infty \right\}$$
$$\|x\|_{\ell^p} := \|x\|_p := \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

Eigenschaften: Banachraum, separabel für $1 \leq p < \infty$, reflexiv für $1 < p < \infty$, uniform konvex für $1 < p < \infty$.
Dualraum: $(\ell^p)^* \cong \ell^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (via $T : \ell^q \to (\ell^p)^*$ mit $(Tx)(y) := \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k \overline{y}_k$).
Hilbertraumstruktur für $p = 2$:

$$\big(x, y\big)_{\ell^2} := \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k \overline{y}_k$$

Andere Namen: $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \zeta)$, wobei ζ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ bezeichne.

1.3 Beschränkte Folgen ℓ^∞

Definition:

$$\ell^\infty := \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\}$$
$$\|x\|_{\ell^\infty} := \|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$$

Eigenschaften: Banachraum, *nicht* separabel, *nicht* reflexiv, *nicht* uniform konvex.
Dualraum: $(\ell^\infty)^* \supsetneq \ell^1$ (aber $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$!)
Andere Namen: $\ell^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \zeta)$, wobei ζ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ bezeichne.

2 Räume stetiger und stetig differenzierbarer Funktionen

2.1 Stetige Funktionen $C(\Omega; X)$

Parameter: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $(X, \|.\|)$ Banachraum.

Definition:

$$
\begin{aligned}
C(\Omega; X) &:= \{ f : \Omega \to X \ : \ f \text{ stetig auf } \Omega \ \} \\
C(\overline{\Omega}; X) &:= \left\{ f : \Omega \to X \ : \ f \text{ stetig auf } \overline{\Omega} \text{ (stetige Fortsetzung) } \right\} \\
\|f\|_{C(\overline{\Omega}; X)} &:= \|f\|_\infty := \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|f(x)\|
\end{aligned}
$$

Eigenschaften: $C(\overline{\Omega}; X)$ für kompaktes $\overline{\Omega}$: Banachraum, separabel (wenn X), *nicht* reflexiv ($C(\Omega; X)$ kein abgeschlossener normierter Raum).

Spezialfälle: Falls $X = \mathbb{R}$, wird es weggelassen.
$C[a, b] := C([a, b])$, $C(a, b) := C((a, b))$.
$C_0(\Omega) := C_c(\Omega) := \{ f \in C(\Omega) \ : \ \operatorname{supp} f \subset \Omega \}$.

Andere Namen: $C(\Omega; X) = C^0(\Omega; X)$.

Verallgemeinerungen: Räume von stetigen Funktionen können auch für allgemeine topologische Räume als Urbild (und Definitionsbereich) definiert werden.

2.2 k-mal stetig differenzierbare Funktionen $C^k(\Omega; X)$

Parameter: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $k \in \mathbb{N}$.

Definition:

$$
\begin{aligned}
C^k(\Omega) &:= \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ : \ f \ k\text{-mal stetig differenzierbar in } \Omega \ \} \\
C^k(\overline{\Omega}) &:= \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ : \ f \ k\text{-mal differenzierbar in } \Omega \text{ mit stetigen Ableitungen in } \overline{\Omega} \ \right\} \\
\|f\|_{C^k(\Omega)} &:= \|f\|_{k,\infty} := \sum_{|\alpha| \le k} \| \mathrm{D}^\alpha f \|_\infty \qquad \left(\text{äquivalent: } \|f\|_{C^k(\Omega)} := \|f\|_{k,\infty} := \max_{|\alpha| \le k} \| \mathrm{D}^\alpha f \|_\infty \right)
\end{aligned}
$$

Eigenschaften: $C^k(\overline{\Omega})$ für kompaktes $\overline{\Omega}$: Banachraum, separabel (wenn X), *nicht* reflexiv ($C^k(\Omega)$ kein abgeschlossener normierter Raum).

Spezialfälle: ähnlich wie bei $C(\Omega; X)$.

2.3 Unendlich oft stetig differenzierbare Funktionen $C^\infty(\Omega; X)$

Parameter: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

Definition:

$$
\begin{aligned}
C^\infty(\Omega) &:= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega) \\
C_0^\infty(\Omega) &:= \{ f \in C^\infty(\Omega) \ : \ \operatorname{supp} f \subset \Omega \text{ kompakt } \} \\
|f|_k &:= \sum_{|\alpha| = k} \| \mathrm{D}^\alpha f \|_\infty \qquad \left(\text{oder äquivalent } \|f\|_{C^k(\Omega)} := \|f\|_{k,\infty} := \max_{|\alpha| = k} \| \mathrm{D}^\alpha f \|_\infty \right)
\end{aligned}
$$

Eigenschaften: Lokalkonvexer Raum mit Halbnormfamilie $\{|f|_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ (*kein* Banachraum).

Andere Namen: $\mathcal{D} := C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, der *Testraum*. Dessen Dualraum (bzgl. der lokalkonvexen Topologie auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$) wird mit $\mathcal{D}'$ bezeichnet und ist der Raum der *Distributionen*.

2.4 Hölder-stetig differenzierbare Funktionen $C^{k,\beta}(\Omega)$

Parameter: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $k \in \mathbb{N}$, $\beta \in (0,1]$.
Definition:

$$C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) := \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;:\; |\, \mathrm{D}^\alpha f(x) - \mathrm{D}^\alpha f(y)| \leq \mathrm{const}\, |x-y|^\beta \text{ für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| = k \Big\}$$

$$\|f\|_{C^{k,\beta}(\overline{\Omega})} := \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} \left(\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|\, \mathrm{D}^\alpha f(x) - \mathrm{D}^\alpha f(y)|}{|x-y|^\beta} \right)$$

Eigenschaften: Banachraum, separabel, *nicht* reflexiv.
Inklusionen: $C^{k,\beta}(\Omega) \subseteq C^k(\Omega)$.
Spezialfälle: $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ sind die Lipschitz-stetigen Funktionen auf $\overline{\Omega}$.

3 Lebesgue- und Bochner-Räume

3.1 p-integrierbare Funktionen $L^p(\Omega, \Sigma, \mu), 1 \le p < \infty$

Parameter: (Ω, Σ, μ) σ-endlicher Maßraum.
Definition:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) &:= \left\{ f : \Omega \to \overline{\mathbb{K}} \ : \ f \text{ messbar und } \int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty \right\} \\
\mathcal{N} &:= \left\{ f : \Omega \to \overline{\mathbb{K}} \ : \ f \text{ messbar und } f \equiv 0 \ \mu\text{-fast überall} \right\} \\
L^p(\Omega, \Sigma, \mu) &:= \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) / \mathcal{N} \\
\|f\|_{L^p(\Omega,\Sigma,\mu)} &:= \|f\|_p := \|f\|_{0,p} := \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

Eigenschaften: Banachraum, separabel für $1 \le p < \infty$, reflexiv für $1 < p < \infty$, uniform konvex für $1 < p < \infty$.
Dualraum: $(L^p(\Omega)^* \cong L^q(\Omega)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (via $T : L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu))^*$ mit $(Tg)(f) := \int_\Omega f \overline{g} \, \mathrm{d}\mu$).
Hilbertraumstruktur für $p = 2$:

$$\left(f, g\right)_{L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)} := \left(f, g\right)_2 := \int_\Omega f \overline{g} \, \mathrm{d}\mu$$

Inklusionen: Falls $\mu(\Omega) < \infty$, dann $L^s(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für $p \le s < \infty$.
Dualitätsabbildung: $1 < p < \infty$: $\mathfrak{F} : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ mit

$$\mathfrak{F}(u)(x) = \frac{u(x) \, |u(x)|^{p-2}}{\|u\|_p}, \qquad u \in L^p(\Omega)$$

$p = 1$: $\mathfrak{F} : L^1(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ mit

$$\mathfrak{F}(u) = \{f \in L^\infty(\Omega)\} \, \|f\|_\infty \le \|u\|_1 \ \text{ und } f(x) = \frac{\overline{u(x)}}{|u(x)|} \, \|u\|_1 \ \text{ f.ü. in } \{u(x) \ne 0\}, \qquad u \in L^1(\Omega)$$

(falls u reelwertig: $f(x) = \|u\|_1 \operatorname{sgn} u(x)$ f.ü.)
Spezialfälle: $L^p(\mathbb{R}^d) := L^p(\mathbb{R}^d, \mathfrak{L}^d, \lambda^d)$ mit der d-dimensionalen Lebesgue-σ-Algebra $\mathfrak{L}^d$.
$L^p := L^p(\mathbb{R})$. $L^p(a, b) := L^p(]a, b[, \mathfrak{L}^1|_{]a,b[}, \lambda^1)$ für $a, b \in \mathbb{R}^d$.

3.2 Wesentlich beschränkte, messbare Funktionen $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

Parameter: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ σ-endlicher Maßraum.
Definition:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f| &:= \inf \left\{ K \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ |f| \le K \ \mu\text{-f.ü.} \right\} \\
\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu) &:= \left\{ f : \Omega \to \overline{\mathbb{K}} \ : \ f \text{ messbar und } \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f| < \infty \right\} \\
\mathcal{N} &:= \left\{ f : \Omega \to \overline{\mathbb{K}} \ : \ f \text{ messbar und } f \equiv 0 \ \mu\text{-fast überall} \right\} \\
L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu) &:= \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu) / \mathcal{N} \\
\|f\|_{L^\infty(\Omega,\mathcal{A},\mu)} &:= \|f\|_\infty := \|f\|_{0,\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f|
\end{aligned}$$

Eigenschaften: Banachraum, *nicht* separabel, *nicht* reflexiv, *nicht* uniform konvex.
Dualraum: $(L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu))^* \supsetneq L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.
Inklusionen: Falls $\mu(\Omega) < \infty$, dann $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^s(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für $1 \leq s \leq \infty$.
Spezialfälle: ähnlich wie bei $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

3.3 p-Bochner-intergierbare Funktionen $L^p(a, b; X), 1 \leq p < \infty$

Parameter: $a, b \in \mathbb{R}$, $(X, \|.\|)$ Banachraum.
Definition:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^p(a, b; X) &:= \left\{ f : [a, b] \to X \ : \ f \text{ Bochner-messbar und } \int_a^b \|f\|^p \, \mathrm{d}\lambda < \infty \right\} \\ \mathcal{N} &:= \{ f : [a, b] \to X \ : \ f \text{ Bochner-messbar und } f \equiv 0 \ \lambda\text{-fast überall} \} \\ L^p(a, b; X) &:= \mathcal{L}^p(a, b; X) / \mathcal{N} \\ \|f\|_{L^p(a,b;X)} &:= \|f\|_p := \|f\|_{0,p} := \left(\int_a^b \|f\|^p \, \mathrm{d}\lambda \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Eigenschaften: Banachraum, separabel für $1 \leq p < \infty$ und X separabel, reflexiv für $1 < p < \infty$ und X reflexiv.
Dualraum: $(L^p(a, b; X))^* \cong L^q(a, b; X^*)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, falls X reflexiv oder X^* separabel.
Hilbertraumstruktur für $p = 2$ und X Hilbertraum:

$$(f, g)_{L^2(a,b;X)} := \int_a^b (f, g) \, \mathrm{d}\lambda$$

3.4 Wesentlich beschränkte, Bochner-messbare Funktionen $L^\infty(a, b; X)$

Parameter: $a, b \in \mathbb{R}$, $(X, \|.\|)$ Banachraum.
Definition:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\infty(a, b; X) &:= \left\{ f : [a, b] \to X \ : \ f \text{ Bochner-messbar und } \operatorname*{ess\,sup}_{[a,b]} \|f\| \, f < \infty \right\} \\ \mathcal{N} &:= \{ f : [a, b] \to X \ : \ f \text{ Bochner-messbar und } f \equiv 0 \ \lambda\text{-fast überall} \} \\ L^\infty(a, b; X) &:= \mathcal{L}^\infty(a, b; X) / \mathcal{N} \\ \|f\|_{L^\infty(a,b;X)} &:= \|f\|_\infty := \|f\|_{0,\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{[a,b]} \|f\| \end{aligned}$$

Eigenschaften: Banachraum, *nicht* separabel, *nicht* reflexiv.
Dualraum: $(L^\infty(a, b; X))^* \supsetneq L^1(a, b; X^*)$.

4 Sobolev-Räume

Im Folgenden meinen D^α und f' immer die *verallgemeinerten* Ableitungen.

4.1 Eindimensionale Sobolev-Hilberträume $H^1(a,b)$, $H_0^1(a,b)$ und $H^{-1}(a,b)$

Parameter: $a, b \in \mathbb{R}$.
Definition:

$$\begin{aligned}
H^1(a,b) &:= \left\{ f \in L^2(a,b) \ : \ \text{Es existiert } f' \in L^2(a,b) \text{ im verallgemeinerten Sinne } \right\} \\
H_0^1(a,b) &:= \left\{ f \in H^1(a,b) \ : \ f(a) = f(b) = 0 \text{ (für absolutstetigen Repräsentanten) } \right\} \\
\|f\|_{H^1(a,b)} &:= \|f\|_{1,2} := \left(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 \right)^{1/2} \\
\|f\|_{H_0^1(a,b)} &:= |f|_{1,2} := \|f'\|_{0,2}
\end{aligned}$$

(auf $H_0^1(a,b)$ sind $\|.\|_{1,2}$ und $|.|_{1,2}$ nach der Poincaré-Friedrichsschen Ungleichung äquivalent)
Eigenschaften: Banachraum, separabel, reflexiv, uniform konvex für $1 < p < \infty$.
Hilbertraumstrukturen:

$$\begin{aligned}
(f,g)_{H^1(a,b)} &:= (f,g)_{L^2(a,b)} + (f',g')_{L^2(a,b)} \\
(f,g)_{H_0^1(a,b)} &:= (f',g')_{L^2(a,b)}
\end{aligned}$$

Dualraum: $(H_0^1(a,b))^*$ wird auch mit $H^{-1}(a,b)$ bezeichnet.

Einbettungen: $H^1(a,b) \overset{c}{\hookrightarrow} C[a,b]$. Gelfand-Dreier: $H_0^1(a,b) \overset{c,d}{\hookrightarrow} L^2(a,b) \overset{c,d}{\hookrightarrow} H^{-1}(a,b)$.

4.2 k-fach im verallgemeinerten Sinne differenzierbare Funktionen $W^{k,p}(\Omega)$

Parameter: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und Lipschitz (Lipschitz-Gebiet), $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$.
Definition:

$$\begin{aligned}
W^{k,p}(\Omega) &:= \{u \in L^p(\Omega) \ : \ \text{Es existiert } \mathrm{D}^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für alle } \alpha \leq k\} \\
W_0^{k,p}(\Omega) &:= \overline{C_0^\infty(\Omega)} \qquad \text{bzgl. } \|.\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\
H^k(\Omega) &:= W^{k,2}(\Omega) \\
H_0^k(\Omega) &:= W_0^{k,2}(\Omega) \\
\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} &:= \|u\|_{k,p} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_{0,p}^p \right)^{1/p} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_{0,\infty} & \text{für } p = \infty \end{cases} \\
|u|_{W^{k,p}(\Omega)} &:= |u|_{k,p} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| = k} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_{0,p}^p \right)^{1/p} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha| = k} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_{0,\infty} & \text{für } p = \infty \end{cases}
\end{aligned}$$

Eigenschaften: Banachraum, separabel für $1 \leq p < \infty$, reflexiv für $1 < p < \infty$, uniform konvex für $1 < p < \infty$.
Normäquivalenz: Auf $W_0^{k,p}(\Omega)$ ist $|.|_{k,p}$ eine zu $\|.\|_{k,p}$ äquivalente Norm (Ungleichung von Poincaré–Friedrichs), die auch die Standard-Norm auf dem $W_0^{k,p}(\Omega)$ darstellt.

Hilbertraumstrukturen:

$$\big(u,v\big)_{H^k(\Omega)} := \big(\!\big(f,g\big)\!\big)_k := \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq k} \mathrm{D}^\alpha u \, \mathrm{D}^\alpha v \, \mathrm{d}x$$

$$\big(u,v\big)_{H_0^k(\Omega)} := \big(f,g\big)_k := \int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} \mathrm{D}^\alpha u \, \mathrm{D}^\alpha v \, \mathrm{d}x$$

Dualraum: $(W_0^{k,p}(\Omega))^*$ wird mit $W^{-k,p}(\Omega)$ bezeichnet.
Inklusionen: Bei genügend glattem Rand: $C^\infty(\overline{\Omega}) \subseteq^d W^{k,p}(\Omega)$.
Einbettungen:

- $k < \frac{d}{p}$: $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $q \leq p^*$, wobei $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{d}$
- $k < \frac{d}{p}$: $W^{k,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ für alle $q < p^*$, wobei $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{d}$
- $k = \frac{d}{p}$: $W^{k,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ für alle $q < \infty$
- $k > \frac{d}{p}$: $W^{k,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{k-\left\lfloor \frac{d}{p} \right\rfloor -1,\beta}(\Omega)$ mit $\beta \in \left[0, \left\lfloor \frac{d}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{d}{p}\right)$.
- Falls $\dim \Omega = 1$ gilt sogar $W^{1,1}(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} (\Omega)$.

Randwerte: Es gibt einen stetigen, kompakten, linearen Operator $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1-1/p,p}(\partial\Omega) \subseteq L^p(\partial\Omega)$ mit $\gamma u = u|_{\partial\Omega}$, falls $u \in W^{1,p} \cap C(\overline{\Omega})$.