Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb
Universität Bielefeld

Numerische Analysis & Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 1

Die Lösungen sind vor dem Tutorium am **24./25.10.2011** abzugeben.

Aufgabe 1.1 [Medikation] (ausnahmsweise 5 Punkte)
Ein Mensch besteht bekanntlich aus zwei Teilen: dem Verdauungsapparat und dem Blutkreislauf. Dieser Mensch, unser Patient, nimmt nun ein Medikament ein, z. B. den Blutdrucksenker Felodipin – ein Kalziumantagonist – das zuerst in den Verdauungsapparat gelangt und von dort an den Blutkreislauf abgegeben wird. Für die Wirkung eines solchen Medikamentes ist die Menge im Blut entscheidend; durch die orale Einnahme kann aber nur die Menge im Verdauungstrakt direkt beeinflusst werden.
Der Wirkstoff wird im Blut abgebaut. Die relative Änderung der Wirkstoffmenge im Blut in einer gewissen Zeitspanne kann dabei als proportional zu dieser Zeitspanne angesehen werden, sofern diese kurz genug ist. Gleiches gilt für den Transport des Medikamentes vom Verdauungsapparat in den Blutkreislauf.

a) Wir nehmen zuerst an, der Patient bekomme nur einmal eine Dosis Felodipin verabreicht. Wie sieht das Differentialgleichungssystem aus, das die Stoffmengen im Blut und in der Verdauung beschreibt?
Löse das System und skizziere den Verlauf der Wirkstoffmenge im Blut.

b) Ein Blutdrucksenker wird normalerweise nicht nur einmal, sondern in regelmäßigen Abständen in gleichen Dosen eingenommen. Was passiert mit dem Wirkstoffpegel im Blut auf lange Sicht?

c) Nach Injektion direkt in die Blutbahn ist bei Felodipin nach 14 Stunden noch die Hälfte der injizierten Dosis im Blut nachweisbar. Bei einmaliger oraler Verabreichung ist nach einer Stunde die Hälfte der Wirkstoffmenge ins Blut übergegangen.[1]
Ein solches Medikament wird der Bequemlichkeit zuliebe häufig nur einmal täglich eingenommen. Unser Patient soll auf einen Wirkstoffspiegel von maximal 20 mg (nach der Einnahme) eingestellt werden. Wie hoch muss die tägliche Dosis sein?

[1] Diese Geschwindigkeit kann sich allerdings, z. B. bei der gleichzeitigen Einnahme von Grapefruitsaft, deutlich erhöhen.

Aufgabe 1.2 [Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen] (3 Punkte)
Bestimme jeweils eine Lösung der folgenden Anfangswertaufgaben:

a) $u' = tu^{-1}(1 + u^2), \quad u(0) = 1,$

b) $u' + 2u = \sin(t), \quad u(0) = 0,$

c) $u' + Au = f, \quad u(0) = u_0 \quad$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 1.3 [Krankheitsausbreitung] (ausnahmsweise 5 Punkte)
Die Ausbreitung ansteckender Krankheiten in einer Population kann unter gewissen Annahmen durch das *SIR-Modell* [2] mathematisch beschrieben werden. Hierbei wird die Population in drei Klassen unterteilt:

S (susceptibles) ... die Individuen, die für die Krankheit anfällig sind,
I (infecives) ... jene, die die Krankheit übertragen können,
R (removed) ... jene, die aus dem Krankheitsprozess ausgeschieden sind.

Bezeichnen $S(t)$, $I(t)$ und $R(t)$ die nichtnegative Anzahl der Individuen der entsprechenden Klassen zum Zeitpunkt $t \geq 0$, so wird die zeitliche Entwicklung der Krankheit durch das System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dS}{dt} = -rSI, \quad \frac{dI}{dt} = rSI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingungen $S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 > 0, R(0) = 0$ beschrieben, wobei $r > 0$, die Infektionsrate, und $\gamma > 0$, die Ausscheidungsrate, als konstant angenommen werden.
Eine weitere Grundannahme des Modells ist, dass die Inkubationszeit vernachlässigbar klein ist und so der Übergang von S zu I ohne zeitlichen Verzug erfolgt.

a) Was lässt sich über $S(t) + I(t) + R(t)$ aussagen?

b) Bestimme I als Funktion von S, also $I = f(S)$, und skizziere f für verschiedene Anfangswerte S_0 und I_0.

c) Die Entwicklung einer Epidemie hängt wesentlich vom Schwellenwert $\rho = \gamma/r$ ab.
Zeige:
- $S = S(t)$ ist stets monoton fallend.
- $I = I(t)$ ist monoton fallend, falls $S_0 < \rho$.
- Es gibt ein $T > 0$ mit $I(T) > I_0$, falls $S_0 > \rho$ (Epidemie).

d) Bestimme die maximale Anzahl der Infizierten im Verlaufe der Krankheit.

e) Bei einer durch einen Schüler ausgelösten Grippeepidemie in einer englischen Internatsschule mit 763 Schülern wurden vom 22. Januar bis zum 4. Februar 1978 insgesamt 512 Krankheitsfälle registriert. Die Infektionsrate lag bei $2.18 \cdot 10^{-3}$ pro Tag und der Schwellenwert betrug 202.
Löse das Anfangswertproblem numerisch mit MATLAB unter Verwendung der vorinstallierten Routine `ode45` und veranschauliche den zeitlichen Verlauf von S, I und R.

[2] Kermack/McKendrick 1927