Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld

Numerische Analysis & Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 10

Die Lösungen sind vor dem Tutorium am **09./10.01.2012** abzugeben.

Aufgabe 10.1 [Normen für Gitterfunktionen] (2 Punkte)

Sei X_τ der aus der Vorlesung bekannte Raum der Gitterfunktionen. Für eine Gitterfunktion $v_\tau = (v^0, ..., v^N) \in X_\tau$ seien

$$\|v_\tau\|_{0,\infty} := \max(\|v_0\|, ..., \|v^N\|), \quad \|v_\tau\|_{0,1} := \|v^0\| + \sum_{j=1}^{N} \tau_j \|v^j\|,$$

$$\|v_\tau\|_{1,1} := \|v_\tau\|_{0,1} + \sum_{j=1}^{N} \tau_j \frac{\|v^j - v^{j-1}\|}{\tau_j}.$$

Zeige, dass es eine vom Gitter (also von τ) unabhängige Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $v_\tau \in X_\tau$ gilt

$$\|v_\tau\|_{0,\infty} \leq C\|v_\tau\|_{1,1}.$$

Aufgabe 10.2 [Stabilität, Konsistenz und Konvergenz von Einschrittverfahren] (3 Punkte)

Zeige - unter geeigneten Voraussetzungen an die Verfahrensfunktion - Stabilität, Konsistenz und Konvergenz des allgemeinen expliziten Einschrittverfahrens bezüglich $(X_\tau, \|\cdot\|_{1,1})$ und $(Y_\tau, \|\cdot\|_{0,1})$.

Aufgabe 10.3 [Spijker-Norm] (3 Punkte)

Zeige - unter geeigneten Voraussetzungen an die Verfahrensfunktion - die Stabilität des allgemeinen expliziten Einschrittverfahrens bezüglich $(X_\tau, \|\cdot\|_{0,\infty})$ und $(Y_\tau, \|\cdot\|_{-1,\infty})$.
Dabei ist $\|\cdot\|_{-1,\infty}$ die Spijker-Norm. Für eine Gitterfunktion $b_\tau = (b^0, .., b^N) \in Y_\tau$ ist

$$\|b_\tau\|_{-1,\infty} := \max_{n=0,1,...,N} \left\| b^0 + \sum_{j=1}^{n} \tau_j b^j \right\|.$$

Dabei ist die leere Summe $\sum\limits_{j=1}^{0} \cdots$ gleich Null nach Konvention.

Zur Erinnerung:

Aufgabe 9.4 [Programmieraufgabe] (3 Punkte)

Programmiere das Verfahren von Heun. Führe eine Testrechnung für ein System linearer Differentialgleichungen durch und vergleiche mit dem exakten Ergebnis. Führe eine weitere Testrechnung für das System aus Aufgabe 1.3 durch und vergleiche mit den in MATLAB vordefinierten Routinen.