Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld

Numerische Analysis & Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 11

Die Lösungen sind vor dem Tutorium am **16./17.01.2012** abzugeben.

Aufgabe 11.1 [Neumann-Reihe] (1 Punkt)

Sei $\tau > 0$ hinreichend klein und $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Zeige, dass $I - \tau B$ invertierbar ist mit

$$(I - \tau B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau B)^n.$$

Aufgabe 11.2 [Padé-Approximation] (3 Punkte)

Wende sowohl das ϑ-Verfahren mit variablen Zeitschritten als auch die Padé-Approximation, das durch die Funktion

$$r(z) = \frac{1 + \frac{z}{3}}{1 - \frac{2z}{3} + \frac{z^2}{6}}$$

bestimmte Verfahren auf ein lineares, autonomes Anfangswertproblem an und zeige Stabilität, Konsistenz und diskrete Konvergenz in geeigneten Normen. Bestimme auch eine Potenzreihenentwicklung und deren Konvergenzradius. Stelle die zugehörigen Funktionen $r = r(z)$ und die Exponentialfunktion in demselben Koordinatensystem graphisch dar.

Aufgabe 11.3 [Testproblem für Einschrittverfahren] (3 Punkte)

Teste das explizite Euler-Verfahren, das modifizierte Euler-Verfahren und die Methode von Heun für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= -2t \cdot u(t)^2, \quad t \in (0,1) \\ u(0) &= 1. \end{aligned}$$

Verifiziere die diskrete Konvergenz der erwarteten Ordnung in den Normen $\|\cdot\|_{0,\infty}$ und $\|\cdot\|_{1,\infty}$. Das modifizierte Euler-Verfahren ist dabei durch die Verfahrensfunktion

$$\varphi(t, v, h) = f(t + \frac{h}{2}, v + \frac{h}{2} f(t, v))$$

bestimmt.