

Numerische Analysis & Differentialgleichungen
Wintersemester 2011/12
Übungsblatt 12

Die Lösungen sind vor dem Tutorium am **23.01.2012** abzugeben.

Aufgabe 12.1 [Simplifying conditions]

(3 Punkte)

Welche der *simplifying conditions* sind für das durch das nachstehende Butcher-Tableau definierte Runge-Kutta-Verfahren erfüllt und welche nicht? Welche Konsistenzordnung liegt vor?

$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3-2\sqrt{3}}{12}$
$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3+2\sqrt{3}}{12}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Aufgabe 12.2 [Lösbarkeit der impliziten Gleichung]

(3 Punkte)

Beweise die eindeutige Lösbarkeit des zugehörigen nichtlinearen Gleichungssystems für die Stufenwerte und damit die Wohldefiniertheit des in Aufgabe 12.1 betrachteten impliziten Runge-Kutta-Verfahrens unter der Annahme, dass die rechte Seite des zu lösenden Anfangswertproblems einer Lipschitz-Bedingung genüge und die verwendeten Zeitschrittweiten hinreichend klein sind.

Aufgabe 12.3 [Runge-Kutta-Verfahren]

(3 Punkte)

Ein s -stufiges Runge-Kutta-Verfahren habe paarweise verschiedene Abszissen $c_j, j = 1, \dots, s$ und sämtliche Gewichte $b_j, j = 1, \dots, s$ seien ungleich Null. Zeige, dass dann gilt:

- a) Aus den Bedingungen $B(s + \nu)$ und $C(s)$ folgt die Bedingung $D(\nu)$.
- b) Aus den Bedingungen $B(s + \nu)$ und $D(s)$ folgt die Bedingung $C(\nu)$.

Aufgabe 12.4 [Programmieraufgabe]

(3 Punkte)

Diese Aufgabe ist eine Zusatzaufgabe.

Programmiere und teste für das folgende eingebaute Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung 2(3) eine Schrittweitensteuerung.

				0	
				1	1
0				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$
1	1				
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$ $\frac{2}{3}$

Wähle als Testgleichung

$$u'(t) = -2t \cdot u(t)^2, \quad t \in (0, 1)$$
$$u(0) = 1.$$