

Numerische Analysis & Differentialgleichungen
Wintersemester 2011/12
Übungsblatt 13

Die Lösungen sind vor dem Tutorium am **30.01.2012** abzugeben.

Aufgabe 13.1 [Dividierte Differenzenquotient] (2 Punkte)

Zeige, dass der dividierte Differenzenquotient aus der zweischrittigen Formel der rückwertigen Differenzen (BDF 2) mit variablen Zeitschrittweiten eine Approximation zweiter Ordnung an die Ableitung einer glatten Funktion ist.

Aufgabe 13.2 [BDF 3] (2 Punkte)

Konstruiere die dreischrittige Formel der rückwertigen Differenzen.

Aufgabe 13.3 [Lineares Mehrschrittverfahren] (3 Punkte)

Formuliere und beweise eine Aussage über die Wohldefiniertheit des allgemeinen linearen Mehrschrittverfahrens.

Aufgabe 13.4 [Prädiktor-Korrektor-Verfahren] (3 Punkte)

Beweise, dass das Prädiktor-Korrektor-Verfahren

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(u^n - u^{n-1}) &= \frac{5}{12}f\left(t_n, u^{n-1} + \frac{3\tau}{2}f(t_{n-1}, u^{n-1}) - \frac{\tau}{2}f(t_{n-2}, u^{n-2})\right) \\ &\quad + \frac{8}{12}f(t_{n-1}, u^{n-1}) - \frac{1}{12}f(t_{n-2}, u^{n-2}), \quad n = 2, 3, \dots, N \\ u^0, u^1 &\text{ vorgegeben,} \end{aligned}$$

welches aus den jeweils zweischrittigen Adams-Bashforth- und Adams-Moulton-Verfahren gebildet wird, unter geeigneten Voraussetzungen konsistent von der Ordnung 3 ist.

Aufgabe 13.5 [Programmieraufgabe] (3 Punkte)

Diese Aufgabe ist eine Zusatzaufgabe.

Programmiere, teste und vergleiche an selbstgewählten Beispielen die BDF 2 mit konstanten Schrittweiten und das Prädiktor-Korrektor-Verfahren aus Aufgabe 13.4.