Prof. Dr. Etienne Emmrich Universität Bielefeld
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Numerische Analysis & Differentialgleichungen
Wintersemester 2011/12
Übungsblatt 2

Die Lösungen sind vor dem Tutorium am **31.10.2011** abzugeben.

Aufgabe 2.1 [Fixpunkt] (1 Punkt)
Beweise die folgende Aussage:

> Sei T eine Abbildung einer abgeschlossenen Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes in sich und sei eine gewisse Potenz von T kontrahierend. Dann besitzt T genau einen Fixpunkt.

Aufgabe 2.2 [Volterra-Integralgleichung] (2 Punkte)
Beweise unter geeigneten Voraussetzungen Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen einer nichtlinearen Integralgleichung vom Volterra-Typ

$$u(x) - \lambda \int_a^x k(x, \xi, u(\xi)) d\xi = f(x), \quad x \in [a, b]$$

im Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

Aufgabe 2.3 [Banach-Raum] (2 Punkte)
Es seien X ein Banach-Raum und $T > 0$.
Zeige, dass $\mathcal{C}([0, T]; X)$, versehen mit der Maximumnorm, ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 2.4 [Summierbare Zahlenfolgen] (2 Punkte)
Sei $X = \ell^1$ der Raum der summierbaren Zahlenfolgen, versehen mit der Norm

$$\|v\|_{\ell^1} := \sum_{j=1}^{\infty} |v_j|, \quad v = (v_1, v_2, ...).$$

Sei $u : [0, T] \to X$ gegeben durch

$$u(t) = (1, t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{6}t^3, ..., \frac{1}{j!}t^j, ...).$$

Zeige, dass $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$.

Aufgabe 2.5 [Punktweise Konvergenz] (2 Punkte)
Sei X ein Banach-Raum und $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$. Zeige, dass die Folge der Treppenfunktionen, definiert wie in der Vorlesung, punktweise gegen u konvergiert.