Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld

Numerische Analysis & Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 3

Die Lösungen sind vor dem Tutorium am **07./08.11.2011** abzugeben.

Aufgabe 3.1 [Lineare Operatoren in Banach-Räumen] (2 Punkte)

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume und $A : X \to Y$ ein linearer Operator.
Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) A bildet beschränkte Mengen in beschränkte Mengen ab. (Man sagt, A ist beschränkt.)

(ii) Es gibt ein $c > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$.

(iii) A ist stetig im Punkte 0.

(iv) A ist stetig in jedem Punkt von X.

Aufgabe 3.2 [Beispiel zum Satz von Picard-Lindelöf] (2 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t)^4 \\ u(0) &= 1. \end{aligned}$$

Bestimme eine exakte Lösung und untersuche, ob die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt sind. Gib ein Existenzintervall für die Lösung an.

Aufgabe 3.3 [Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung] (2 Punkte)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller Banach-Raum, $T > 0$ und sei $u \in \mathcal{C}([0,T]; X)$.
Weiterhin sei

$$v(t) = \int_0^t u(s)\, ds, \quad t \in [0,T].$$

Zeige, dass v in $\mathcal{C}^1([0,T]; X)$ liegt und $v'(t) = u(t)$ gilt.

Aufgabe 3.4 [Nemyzki-Operator] (2 Punkte)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller Banach-Raum, $T > 0$ und $f : [0, T] \times X \to X$ stetig.
Zeige, dass der zugehörige Nemytzki-Operator den Raum $\mathcal{C}([0, T]; X)$ in sich selbst abbildet.

Aufgabe 3.5 [Fourierreihenansatz] (2 Punkte)

Betrachte das Anfangsrandwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - \mu u_{xx} &= 0, && \text{in } (0,\pi) \times (0,T) \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0, && \text{für alle } t \in (0,T) \\ u(\cdot,0) &= u_0, && \text{in } (0,\pi) \end{aligned}$$

mit $\mu > 0$.
Bestimme eine Lösung mit Hilfe des Ansatzes

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t) \sin(jx).$$