

Numerische Analysis & Differentialgleichungen
Wintersemester 2011/12
Übungsblatt 4

Die Lösungen sind vor dem Tutorium am **14./15.11.2011** abzugeben.

Aufgabe 4.1 [Randwertaufgabe]

(2 Punkte)

Es sei $j \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $j \leq \frac{4}{9}$ eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Randwertproblems

$$\begin{aligned}\phi''(x) &= \frac{j}{\sqrt{\phi(x)}}, & x \in (0, 1) \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(1) &= 1\end{aligned}$$

ist. (Hinweis: Multipliziere mit $\phi'(x)$ und integriere zweimal geeignet.)

Aufgabe 4.2 [Energiefunktional]

(2 Punkte)

Sei $(H, (\cdot, \cdot), |\cdot|)$ ein reeller Hilbert-Raum und $T > 0$. Zeige, dass für alle $u \in C^1([0, T]; H)$ gilt:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 = (u'(t), u(t)), \quad t \in [0, T].$$

Aufgabe 4.3 [Differentialungleichung]

(2 Punkte)

Sei $a \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$, $b \in C([0, T]; \mathbb{R})$, $\lambda \in C([0, T]; \mathbb{R})$ und gelte die Differentialungleichung

$$a'(t) \leq \lambda(t)a(t) + b(t), \quad t \in (0, T).$$

Zeige, dass dann für alle $t \in [0, T]$

$$a(t) \leq e^{\int_0^t \lambda(s) ds} \cdot a(0) + \int_0^t e^{\int_s^t \lambda(\tau) d\tau} b(s) ds$$

erfüllt ist.