

Numerische Analysis & Differentialgleichungen
Wintersemester 2011/12
Übungsblatt 5

Die Lösungen sind vor dem Tutorium am **21./22.11.2011** abzugeben.

Aufgabe 5.1 [Lemma von Gronwall]

(2 Punkte)

In der Vorlesung wurde das Lemma von Gronwall in der folgenden Form bewiesen:

Sei $T > 0$, $t_0 \in [0, T)$, $a, b \in L^\infty(t_0, T)$ (d.h. Lebesgue-messbar und wesentlich beschränkt),
 $\lambda \in L^1(t_0, T)$ (d.h. Lebesgue-integrierbar), und $\lambda(t) \geq 0$ fast überall in (t_0, T) .
Dann folgt aus

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t \lambda(s) a(s) ds \quad \text{f. ü. in } (t_0, T)$$

für fast alle $t \in (t_0, T)$

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t e^{\Lambda(t) - \Lambda(s)} \lambda(s) b(s) ds,$$

wobei $\Lambda(t) := \int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau$.

- a) Zeige, dass die Voraussetzung $\lambda(t) \geq 0$ f. ü. in (t_0, T) wesentlich ist, durch Konstruktion eines Gegenbeispiels zur Aussage des Gronwallschen Lemmas, wenn λ nicht der Vorzeichenbedingung genügt.
- b) Zeige eine dem Gronwallschen Lemma entsprechende Aussage für den Fall $t < t_0$.

Aufgabe 5.2 [Anfangswertaufgabe mit linear-beschränkter rechter Seite]

(2 Punkte)

Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)), \quad t \in (0, T) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

mit $t_0 \in [0, T]$, $u_0 \in X$ und $f \in \mathcal{C}([0, T] \times X; X)$.

Weiterhin sei f linear-beschränkt und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung.

Zeige, dass es unter diesen Voraussetzungen genau eine globale Lösung $u \in \mathcal{C}^1([0, T]; X)$ gibt.

Aufgabe 5.3 [Stabilitätseigenschaften]

(3 Punkte)

Vorgelegt sei das Anfangswertproblem der vorherigen Aufgabe. Dieses Mal genüge die rechte Seite einer globalen Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstanten L . Nach dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es zu jedem Anfangswert aus X genau eine Lösung. Seien nun u und v die Lösungen zu den Anfangswerten u_0 bzw. v_0 . Zeige, dass für alle $t \in [0, T]$ folgende Abschätzung gilt:

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{L|t-t_0|} \|u_0 - v_0\| \leq e^{LT} \|u_0 - v_0\|.$$

Nun seien f, g zwei rechte Seiten, die beide einer globalen Lipschitz-Bedingung mit den Konstanten L_f bzw. L_g genügen. Erneut ist der Satz von Picard-Lindelöf anwendbar. Seien nun u und v die Lösungen der Differentialgleichung mit rechter Seite f bzw. g und dem Anfangswert $u(t_0) = v(t_0) = u_0$. Zeige, dass für alle $t \in [0, T]$ folgende Abschätzung gilt:

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq |t - t_0| e^{\min\{L_f, L_g\}|t-t_0|} \sup_{t \in [0, T], w \in X} \|f(t, w) - g(t, w)\| \\ &\leq T e^{\min\{L_f, L_g\}T} \sup_{t \in [0, T], w \in X} \|f(t, w) - g(t, w)\|. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.4 [Fredholmscher Integraloperator]

(2 Punkte)

Wir betrachten die Integro-Differentialgleichung

$$u_t(x, t) + \int_{-1}^1 k(x, \xi) u(\xi, t) d\xi = f(x, t), \quad (x, t) \in (-1, 1) \times (0, T)$$

mit stetigem Kern $k : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Es sei $A : L^2(-1, 1) \rightarrow L^2(-1, 1)$ der zugehörige Fredholmsche Integraloperator. Weise nach, dass $-A$ in $L^2(-1, 1)$ nicht stark dissipativ sein kann.