Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld

Numerische Analysis & Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 6

Die Lösungen sind vor dem Tutorium am **28./29.11.2011** abzugeben.

Aufgabe 6.1 [Dissipative Systeme] (3 Punkte)

Sei $\mathbb{R}^d$ versehen mit dem euklidischen Skalarprodukt.

a) Unter welchen Bedingungen an die Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist das lineare Differentialgleichungssystem $u'(t)+Au(t) = f(t), t > 0$ dissipativ? Bestimme bestmöglich die Konstante μ aus der Definition der starken Dissipativität.

b) Berechne die Lösung der Differentialgleichungssysteme mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -25 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

jeweils zum Anfangswert $u(0) = (0, 1)^T$ sowohl exakt, als auch numerisch mit dem expliziten und dem impliziten Eulerverfahren für eine klein genug gewählte Schrittweite. Beschreibe das Verhalten der Lösung und der einzelnen Lösungskomponenten. Welches System ist dissipativ?

c) Kann ein anderes Skalarprodukt gefunden werden, mit dem das nicht-dissipative System aus b) dissipativ ist?

Aufgabe 6.2 [Mathematics Subject Classification] (3 Punkte)

Das *MSC(2010)* ist ein System zur Klassifizierung der mathematischen Fachgebiete, wobei jedem Gebiet eine Kombination aus fünf Ziffern und Buchstaben zugeordnet wird. Anhand dieses Codes kann leicht herausgefunden werden, in welche Gebiete ein Artikel oder ein Buch einzuordnen ist. Bei einem Artikel ist die *MSC*-Angabe meist nach dem Abstract, im Buch auf einer der ersten Seiten angegeben.

Welchen *MSC(2010)*-Code haben die folgenden mathematischen Themenbereiche?

- Theorie der Wellengleichungen
- Nichtlineare Randwertprobleme
- Integralgleichungen vom Volterra-Typ
- Gewöhnliche Differentialgleichungen in Banach-Räumen
- Zeitdiskretisierung
- Akkretive Operatoren

Aufgabe 6.3 [Integrodifferentialgleichung] (2 Punkte)

Vorgelegt sei das Anfangswertproblem für die partielle Integrodifferentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \int\limits_a^b \exp\left(t^\alpha - (x-y)^2\right) u(y,t)\; dy + xt^\alpha u(x,t) = x^2 + t^\alpha, \quad x \in (a,b), t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x),$$

wobei $\alpha \geq 0$ und $u_0 \in \mathbb{R}$ gegeben seien. Gib eine geeignete Formulierung als Anfangswertproblem für eine lineare Operator-Differentialgleichung an und untersuche diese auf Lösbarkeit. Gib im Fall $\alpha = 0$ eine explizite Formel für die Lösung an.

Aufgabe 6.4 [Differentialgleichung mit schiefsymmetrischer Matrix] (1 Punkt)

Es sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Zeige, dass A genau dann schiefsymmetrisch ist, wenn für jede Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $u'(t) + Au(t) = 0$ die euklidische Norm $|u(t)|$ konstant ist für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6.5 [Berühmte Mathematiker] (3 Punkte)

Wer war Kurt Otto Friedrichs?
Erstelle eine Kurzbiographie und benenne seine bedeutenden mathematischen Leistungen.