Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb
Universität Bielefeld

Numerische Analysis & Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 7

Die Lösungen sind vor dem Tutorium am **05./06.12.2011** abzugeben.

Aufgabe 7.1 [Gronwallsches Lemma, diskrete Versionen] (3 Punkte)

Beweise die folgenden diskreten Versionen des Gronwallschen Lemmas in Analogie zu den für das Kontinuierliche aus der Vorlesung bekannten Beweisen. Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen, $\tau > 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt:

a) Aus

$$a_n \leq b_n + \lambda\tau \sum_{j=0}^{n-1} a_j, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

und $\lambda > 0$ folgt

$$a_n \leq b_n + \lambda\tau \sum_{j=0}^{n-1} (1 + \lambda\tau)^{n-j-1} b_j, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

b) Aus

$$a_n \leq b_n + \lambda\tau \sum_{j=0}^{n-1} a_j, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

und $\lambda > 0$ mit $\lambda\tau < 1$ folgt

$$a_n \leq b_n + \frac{\lambda\tau}{1 - \lambda\tau} \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \lambda\tau)^{-n+j} b_j, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

c) Aus

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\tau} \leq g_n + \lambda a_n, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

und $1 + \lambda\tau > 0$ folgt

$$a_n \leq (1 + \lambda\tau)^n \left(a_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (1 + \lambda\tau)^{-j+1} g_j \right), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

d) Aus

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\tau} \leq g_{n+1} + \lambda a_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

und $1 - \lambda\tau > 0$ folgt

$$a_n \leq (1 - \lambda\tau)^{-n} \left(a_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \lambda\tau)^{j} g_{j+1} \right), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Aufgabe 7.2 [Lösungsapproximation, Teil 1] (3 Punkte)

Seien $T > 0$ und $u_0 \in \mathbb{R}^d$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)), \quad t \in (0, T) \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

wobei es zu $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ein $L \geq 0$ gebe, so dass für alle $s, t \in [0, T]$ und $v, w \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\|f(s, v) - f(t, w)\| \leq L(|s - t| + \|v - w\|).$$

Das ϑ-Verfahren, $\vartheta \in [0, 1]$, angewendet auf einer äquidistanten Zerlegung des Intervalls $[0, T]$, also $t_n = n\tau, \tau = T/N$, zur näherungsweisen Berechnung von $u^n \approx u(t_n), n = 1, 2, ..., N$, bei gegebenen $u^0 \approx u_0$ lautet

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} = (1 - \vartheta) f(t_{n-1}, u^{n-1}) + \vartheta f(t_n, u^n), \quad n = 1, 2, ..., N.$$

Zeige unter geeigneten Voraussetzungen

a) die Wohldefiniertheit des Verfahrens,

b) die von der Wahl der Schrittweite unabhängige Beschränktheit der zeitdiskreten Lösung und ihrer diskreten Ableitung (dem Differenzenquotienten),

c) die stetige Abhängigkeit der zeitdiskreten Lösung vom Anfangswert,

d) eine Fehlerabschätzung erster Ordnung für $\vartheta \neq \frac{1}{2}$,

e) eine Fehlerabschätzung zweiter Ordnung für $\vartheta \neq \frac{1}{2}$.

Aufgabe 7.3 [Lösungsapproximation, Teil 2] (3 Punkte)

Wir modifizieren nun das numerische Verfahren wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= f(t_{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}}), \quad n = 0, 1, ..., N - 1, \\ t_{n+\frac{1}{2}} &= \frac{t_n + t_{n+1}}{2}, \qquad u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^n + u^{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

Zeige unter geeigneten Voraussetzungen

a) die Wohldefiniertheit des Verfahrens,

b) A-priori-Abschätzungen für $\{u_n\}$ und $\{\frac{u^n + u^{n+1}}{2}\}$,

c) eine Fehlerabschätzung zweiter Ordnung, wenn u''' existiert und geeignet integrierbar ist.

Hinweis: Für die Lösung ist folgende Beziehung zu zeigen:

$$\frac{e^{n+1} - e^n}{\tau} = \rho^n := \frac{1}{2\tau} \left(\int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} (t - t_n)^2 u'''(t) dt + \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^2 u'''(t) dt \right) + f(t_{n+\frac{1}{2}}, u(t_{n+\frac{1}{2}})) - f(t_{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}}).$$