Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld

Numerische Analysis & Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 8

Die Lösungen sind vor dem Tutorium am **12./13.12.2011** abzugeben.

Aufgabe 8.1 [Programmieraufgabe] (3 Punkte)

Programmiere die Mittelpunktregel (One-leg-Variante des Crank-Nicolson-Verfahrens) zur numerischen Lösung eines skalaren Anfangswertproblems. Verwende dabei eine Newton-Iteration zur Lösung der in jedem Zeitschritt auftretenden nichtlinearen Gleichungen. Wähle als Startwert den Wert der Näherungslösung aus dem vorhergehenden Zeitschritt. Teste das Programm für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= -u(t)^3, \quad t \in (0, 10) \\ u(0) &= 2 \end{aligned}$$

und vergleiche die exakte Lösung mit den zu verschiedenen äquidistanten Zeitgittern berechneten numerischen Lösungen. Ist quadratische Konvergenz zu beobachten?

Aufgabe 8.2 [Approximationsschema mit Restriktion und Prolongation] (3 Punkte)

Das Intervall $[a, b]$ sei äquidistant in $N \in \mathbb{N}$ Teilintervalle der Länge h zerlegt.
Es seien $X = \mathcal{C}([a, b])$ und $X_h = \mathbb{R}^{N+1}$, jeweils versehen mit der Maximumnorm.
Ferner seien $r_h : X \to X_h$ die punktweise Restriktion und $p_h : X_h \to X$ die stückweise lineare Interpolation wie in der Vorlesung beschrieben.
Zeige Stabilität und Kompatibilität des Approximationsschemas $(X_h, p_h, r_h)_{h \in \mathcal{H}}$, wobei die Indexmenge $\mathcal{H}$ zu einer Folge von feiner werdenden Zerlegungen gehöre.

Aufgabe 8.3 [Lösungsapproximation, Teil 3] (6 Punkte)

Diese Aufgabe ist eine Zusatzaufgabe.

Seien $T > 0$ und $u_0 \in \mathbb{R}^d$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)), \quad t \in (0, T) \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

wobei $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stark dissipativ sei.

Wir betrachten die One-leg-Variante des ϑ-Verfahrens, $\vartheta \in [0, 1]$, auf einer äquidistanten Zerlegung von $[0, T]$ mit $t_n = n\tau, \tau = T/N$, zur näherungsweisen Berechnung von $u_n \approx u(t_n)$, $n = 1, 2, ..., N$, bei gegebenem $u^0 \approx u_0$.

Zeige unter geeigneten Voraussetzungen

a) die Wohldefiniertheit des Verfahrens,

b) die von der Wahl der Schrittweite unabhängige Beschränktheit der zeitdiskreten Lösung und gegebenenfalls ihrer diskreten Ableitung (dem Differenzenquotienten),

c) die stetige Abhängigkeit der zeitdiskreten Lösung vom Anfangswert,

d) eine Fehlerabschätzung erster Ordnung für $\vartheta \neq \frac{1}{2}$,

e) eine Fehlerabschätzung zweiter Ordnung für $\vartheta = \frac{1}{2}$.