

**Numerische Analysis & Differentialgleichungen**  
**Wintersemester 2011/12**  
Übungsblatt 9

Die Lösungen sind vor dem Tutorium am **19./20.12.2011** abzugeben.

**Aufgabe 9.1** [Satz von Kantorowitsch und Lax] (3 Punkte)

Wir betrachten das aus der Vorlesung bekannte Approximationsschema und wollen eine gewisse Umkehrung des Satzes von Kantorowitsch und Lax studieren. Beweise: Konvergiert das Verfahren für  $f = Au$  (d. h. die Folge der Lösungen der diskreten Ersatzprobleme konvergiert diskret gegen  $u$ , wenn nur die Folge der rechten Seiten der diskreten Ersatzprobleme diskret gegen  $f$  konvergiert) und sind die Approximationen  $A_h$  für hinreichend kleines  $h$  bezüglich  $h$  gleichmäßig Lipschitz-stetig, so bilden die Operatoren  $A_h$  eine in  $u$  konsistente Approximation an  $A$ .

**Aufgabe 9.2** [Restriktion und Prolongation von Zahlenfolgen] (3 Punkte)

Es sei  $X = c_0$  der Raum der gegen Null konvergenten reellen Zahlenfolgen, versehen mit der Maximumnorm. Weiterhin seien  $h = 1/N$ ,  $N = 1, 2, 3, \dots$  und  $X_h = \mathbb{R}^N$ . Ferner seien  $r_h : X \rightarrow X_h$  die Restriktion, die sich durch Weglassen der letzten Folgenglieder ergibt, und  $p_h : X_h \rightarrow X$  die Prolongation, die sich durch Fortsetzung mit Null ergibt.

Zeige Stabilität und Kompatibilität des Approximationsschemas  $(X_h, p_h, r_h)_{h \in \mathcal{H}}$ .

Wie verhält es sich, wenn  $X = \ell^\infty$ , der Raum der beschränkten reellen Zahlenfolgen, versehen mit der Maximumnorm, ist?

**Aufgabe 9.3** [Verfahren von Heun] (3 Punkte)

Leite eine Fehlerabschätzung für das Verfahren von Heun her.

**Aufgabe 9.4** [Programmieraufgabe] (3 Punkte)

**Die Aufgabe ist für das Tutorium am 9./10. Januar vorzubereiten.**

Programmiere das Verfahren von Heun. Führe eine Testrechnung für ein System linearer Differentialgleichungen durch und vergleiche mit dem exakten Ergebnis. Führe eine weitere Testrechnung für das System aus Aufgabe 1.3 durch und vergleiche mit den in MATLAB vordefinierten Routinen.