Prof. Dr. Etienne Emmrich
Universität Bielefeld

Sommersemester 2010

Numerik partieller Differentialgleichungen

1. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 6. Mai 2010

Aufgabe 1.1 **1 Punkt**

Sei $v \in L^1(a,b)$ und sei für festes $x_0 \in [a,b]$

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} v(\xi) d\xi\,, \qquad x \in [a,b]\,.$$

Zeige, daß v auf $[a,b]$ verallgemeinerte Ableitung von u ist.

Aufgabe 1.2 **2 Punkte**

Sei $B(0,R) \subset \mathbb{R}^d$ die offene Kugel um den Ursprung vom Radius $R \in (0,1)$ und sei

$$u(x) = \big| \ln |x| \big|^{\gamma}\,, \quad x \neq 0\,,$$

wobei $|x|$ die euklidische Norm von $x \in B(0,R)$ bezeichne. Untersuche, für welche γ

$$u \in H^1(B(0,R))$$

gilt. Kann u stetig auf die abgeschlossene Kugel $\bar{B}(0,R)$ fortgesetzt werden?

Aufgabe 1.3 **3 Punkte**

Gegeben sei ein polygonal berandetes, einfach zusammenhängendes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Über Ω sollen stetige Funktionen $u = u(x,y)$ stückweise linear interpoliert werden. Hierzu wird Ω trianguliert, d. h. in (mindestens zwei) Dreiecke zerlegt. Da über jedem der Dreiecke eine lineare Funktion eindeutig bestimmt ist durch die Funktionswerte

(i) in den Ecken oder

(ii) in den Seitenmittelpunkten,

ergeben sich zwei verschiedene Möglichkeiten der Interpolation. Die interpolierenden Funktionen seien mit $u_1 = I_1 u$ (Ecken) und $u_2 = I_2 u$ (Seitenmittelpunkte) bezeichnet.

a) Für das Gebiet $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, zerlegt in zwei Dreiecke, veranschauliche man I_1 und I_2 und bestimme u_1 und u_2 für die Funktion $u(x,y) = xy$. Man vergleiche die Werte $u_1(1/2,1/2)$ sowie $u_2(0,0)$ und $u_2(1,1)$ mit den exakten Werten.

b) Sind u_1 und u_2 stets stetig?

c) Die Interpolierenden u_1 und u_2 können als Linearkombination von Basisfunktionen (Knotenbasis) dargestellt werden:

$$u_1(x,y) = \sum_{E_i \text{ist Ecke}} u(E_i)\, \phi_i^{(1)}(x,y) \tag{1}$$

$$u_2(x,y) = \sum_{S_i \text{ist Seitenmp.}} u(S_i)\, \phi_i^{(2)}(x,y)\,. \tag{2}$$

Dabei sind die Basisfunktionen $\phi_i^{(1,2)}$ wiederum stückweise lineare Funktionen mit der Knotenbasiseigenschaft

$$\begin{aligned} \phi_i^{(1)}(E_j) &= \delta_{ij} \quad \text{für alle Ecken } E_j \text{ der Zerlegung,} \\ \phi_i^{(2)}(S_j) &= \delta_{ij} \quad \text{für alle Seitenmittelpunkte } S_j \text{ der Zerlegung.} \end{aligned}$$

Jedem Knoten (Ecke bzw. Seitenmittelpunkt) ist also genau eine Basisfunktion zugeordnet, die nur in diesem Knoten den Wert 1 hat und in allen anderen Knoten den Wert 0 annimmt.

Bestimme die Basisfunktionen für das Beispiel aus Teilaufgabe a) und vergleiche die Darstellungen (1), (2) mit den in a) erzielten Ergebnissen.

d) Zeige (mit Hilfe des Eulerschen Polyedersatzes), daß es bei I_1 stets weniger Basisfunktionen als bei I_2 gibt, d. h. die Dimension des linearen Raumes der durch I_1 definierten Splines ist stets kleiner als die des Raumes zu I_2.

Aufgabe 1.4 **3 Punkte**

Bei der Finite-Elemente-Methode (FEM) finden sogenannte lineare Hutfunktionen (lineare Splines) Anwendung. Gegeben sei das Intervall $[a, b]$ und eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ mit den Schrittweiten $h_i := x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dann sind die linearen Hutfunktionen definiert durch

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i} & \text{falls } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} & \text{falls } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

a) Skizziere die linearen Hutfunktionen. Wie könnten ϕ_0 und ϕ_n sinnvoll definiert werden?

Beweise die folgenden Eigenschaften:

b) Die linearen Hutfunktionen sind nichtnegativ, bilden eine Partition der Eins und eine Knotenbasis.

c) Sei $h_0 = h_{n+1} = 0$ vereinbart. Dann gilt:

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{h_i + h_{i+1}}{3} & \text{für } i = j \\ \dfrac{h_{\max(i,j)}}{6} & \text{für } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

d) Sei die Funktion $u = u(x) \in \mathcal{C}^2[a, b]$ stückweise linear interpoliert. Die Interpolierende sei mit Iu bezeichnet. Gib diese auf dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ explizite an und beweise die Fehlerabschätzungen:

$$\begin{aligned} |u(x) - Iu(x)| &\leq \frac{h_{i+1}^2}{8} \max_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} |u''(\xi)| \quad \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \|u - Iu\|_{0,\infty} &\leq \frac{h^2}{8} \|u''\|_{0,\infty} \quad \text{mit } h := \max_{i=1,\ldots,n} h_i . \end{aligned}$$

Es ist nach einem elementaren, direkten Beweis gesucht.