Prof. Dr. Etienne Emmrich
Universität Bielefeld Sommersemester 2010

# Numerik partieller Differentialgleichungen

## 2. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 20. Mai 2010

**Aufgabe 2.1** 3 Punkte

Vorgelegt sei die Aufgabe

$$-u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x)\,, \quad x \in (a,b)\,, \quad u(a) = \alpha\,,\ u(b) = \beta\,.$$

Seien $c, d \in L^\infty(a,b)$ und $f \in L^2(a,b)$. Stelle die schwache Formulierung auf und gib Bedingungen für $c, d$ an, so daß die eindeutige Lösbarkeit gesichert ist. Stelle unter Verwendung linearer finiter Elemente bei einer äquidistanten Zerlegung und unter Verwendung der Trapez-Regel die Gleichungen für die näherungsweise Berechnung der Lösung auf. Schreibe und teste (mit selbst gewählten Problemdaten) ein Computerprogramm (z. B. in Matlab) zur numerischen Lösung, welches neben der Trapez- auch die Simpson-Regel zuläßt.

**Aufgabe 2.2** ausnahmsweise 5 Punkte

Wird in einen stark und gleichmäßig strömenden Fluß eine flüssige Verschmutzung eingeleitet, so treten zwei physikalische Effekte nebeneinander auf: Diffusion und Konvektion. Das einfachste mathematische Modell zur Beschreibung solcher Konvektions-Diffusions-Probleme ist das Randwertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) + u'(x) &= 1\,, \quad x \in (0,1)\,, \\ u(0) = u(1) &= 0\,, \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon$ ein sehr kleiner Parameter ($0 < \varepsilon \ll 1$) ist, wenn die Diffusion $-\varepsilon u''$ klein gegenüber der Konvektion $u'$ ist.

Die numerische Lösung derartiger Probleme bereitet Schwierigkeiten, da sich in der exakten Lösung sogenannte Grenzschichten herausbilden (die Ableitungen werden sehr groß), die für $\varepsilon \to 0$ stark zunehmen.

a) Bestimme die exakte Lösung des Problems und veranschauliche diese für $\varepsilon = 0.1$ und $\varepsilon = 0.01$. Untersuche das Verhalten der Lösung für $\varepsilon \to 0$.

b) Für die numerische Lösung sei das Intervall $[0,1]$ durch ein *Shishkin-Gitter* zerlegt. Das ist eine stückweise äquidistante Zerlegung: Gegeben sei eine gerade Zahl $N \geq 4$. Das Intervall $[0,1]$ wird zunächst in die Intervalle $[0,\sigma]$ und $[\sigma,1]$ zerlegt, wobei

$$\sigma = \max\left\{\frac{1}{2},\, 1 - 2\varepsilon \ln N\right\}\,.$$

Anschließend werden die beiden Intervalle $[0,\sigma]$ und $[\sigma,1]$ in jeweils $N/2$ gleichgroße Teilintervalle zerlegt.

Skizziere für $N = 20$ und $\varepsilon = 0.1$ bzw. $\varepsilon = 0.01$ das Shishkin-Gitter und bestimme explizite die Stützstellen $x_i$, $i = 0, 1, \ldots, N$, der Zerlegung.

Löse das Problem für $\varepsilon = 0.1$ bzw. $\varepsilon = 0.01$ numerisch mit linearen finiten Elementen auf dem Shishkin-Gitter und (bei gleichem $N$) auf einem äquidistanten Gitter und vergleiche die Lösungen.

c) Die exakte Lösung soll stückweise linear interpoliert werden. Welchen Vorteil hat das Shishkin-Gitter gegenüber einer einfachen äquidistanten Zerlegung?

d) Es bezeichne $Iu$ die stückweise lineare Interpolation der exakten Lösung $u$ zu den Stützstellen des Shishkin-Gitters. Man beweise die folgenden Abschätzungen:

Für $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, gilt

$$|u(x) - (Iu)(x)| \leq const \left(N^{-1} \ln N\right)^2 .$$

Ist $x \in [0, \sigma]$, dann gilt sogar

$$|u(x) - (Iu)(x)| \leq const\, N^{-2} .$$

Warum handelt es sich bei der zweiten um eine bessere Abschätzung?

*Hinweise:* Es ist eine Fallunterscheidung erforderlich für die Fälle $\sigma = 1/2$ und $\sigma > 1/2$ (der praktisch relevante Fall) sowie $x \in [0, \sigma]$ und $x \in [\sigma, 1]$.

Für den Beweis der verbesserten Abschätzung in $[0, \sigma]$ ist von der expliziten Darstellung von $Iu$ auszugehen und der Fehler $u(x) - (Iu)(x)$ direkt zu berechnen und geeignet abzuschätzen, ohne auf Ableitungen zurückzugreifen.

Es sei bemerkt, daß für die FEM-Lösung $u_N$ auf dem Shishkin-Gitter die in $\varepsilon$ gleichmäßige Fehlerabschätzung

$$\|u - u_N\|_\varepsilon \leq const\, N^{-1} \ln N$$

gezeigt werden kann, wobei $\|\cdot\|_\varepsilon$ die durch $\|v\|_\varepsilon^2 := \varepsilon\, |v|_{1,2}^2 + \|v\|_{0,2}^2$ definierte gewichtete Norm ist.