Prof. Dr. Etienne Emmrich
Universität Bielefeld

Sommersemester 2010

Numerik partieller Differentialgleichungen

3. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 17. Juni 2010

Aufgabe 3.1 **3 Punkte**

Vorgelegt sei die (nicht notwendig äquidistante) Zerlegung

$$\mathfrak{Z} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\,.$$

Es sei V_h die lineare Hülle der auf $\mathfrak{Z}$ definierten linearen Hutfunktionen. Beweise die folgenden *inversen Ungleichungen*: Es gibt eine von $\mathfrak{Z}$ unabhängige Konstante $c > 0$, so daß für alle $v_h \in V_h$

$$\begin{aligned}
&(i) && \|v_h\|_{0,\infty} \leq c\, h_{\min}^{-1/2}\ \|v_h\|_{0,2}\,, \\
&(ii) && \|v_h'\|_{0,\infty} \leq c\, h_{\min}^{-3/2}\ \|v_h\|_{0,2}\,, \\
&(iii) && |v_h|_{1,2} \leq c\, h_{\min}^{-1}\ \|v_h\|_{0,2}
\end{aligned}$$

gilt, wobei $h_{\min} := \min_{i=1,\dots,N}(x_i - x_{i-1})$. Warum heißen diese Abschätzungen *inverse* Ungleichungen?

Aufgabe 3.2 **2 Punkte**

Es sei

$$a(u,v) := \int_0^1 x^2 u'(x) v'(x) dx, \quad u, v \in V := H_0^1(0,1).$$

(a) Zeige, daß a nicht stark positiv ist. (Hinweis: Betrachte lineare Hutfunktionen).

(b) Betrachte die äquidistante Zerlegung des Intervalls $(0,1)$ mit der Schrittweite h und die zugehörigen linearen Hutfunktionen, die den Raum $V_h \subset V$ aufspannen mögen. Ist a stark positiv auf V_h?

Aufgabe 3.3 **3 Punkte**

Vorgelegt sei die Aufgabe

$$-u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x)\,, \quad x \in (a,b)\,, \quad u(a) = \alpha\,,\ u(b) = \beta\,.$$

Seien $c, d \in L^\infty(a,b)$ und $f \in L^2(a,b)$. Stelle die schwache Formulierung auf und gib Bedingungen für c, d an, so daß die eindeutige Lösbarkeit gesichert ist. Stelle unter Verwendung linearer finiter Elemente bei einer äquidistanten Zerlegung und unter Verwendung der Trapez-Regel die Gleichungen für die näherungsweise Berechnung der Lösung auf. Schreibe und teste (mit selbst gewählten Problemdaten) ein Computerprogramm (z. B. in Matlab) zur numerischen Lösung, welches neben der Trapez- auch die Simpson-Regel zuläßt.