Prof. Dr. Etienne Emmrich
Universität Bielefeld

Sommersemester 2010

Numerik partieller Differentialgleichungen

4. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 1. Juli 2010

Aufgabe 4.1 **3 Punkte**

Sei T ein Dreieck und seien a_1, a_2, a_3 die Eckpunkte von T, a_{12}, a_{13}, a_{23} die Seitenmittelpunkte von T sowie a_{123} der Schwerpunkt von T.

a) Zeige, daß die Kubaturformel

$$\int_T v(x)\,dx \approx \frac{|T|}{3}\left(v(a_{12}) + v(a_{13}) + v(a_{23})\right)$$

Polynome zweiten Grades, nicht aber Polynome höheren Grades exakt integriert.

b) Zeige, daß $a_{123} = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$. Bestimme die Gewichte einer Kubaturformel mit den Aufpunkten $a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{123}$ so, daß diese zumindest exakt ist für Polynome dritten Grades.

c) Von welcher Konsistenzordnung ist die Trapezregel

$$\int_T v(x)\,dx \approx \frac{|T|}{3}\left(v(a_1) + v(a_2) + v(a_3)\right)?$$

Konstruiere durch Extrapolation nach einmaliger Seitenhalbierung eine genauere Kubaturformel.

Aufgabe 4.2 **2 Punkte**

Sei $\mathfrak{T}_h$ eine zulässige Dreieckszerlegung aus einer quasiuniformen Familie von Zerlegungen eines polygonal berandeten Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und sei S_h der zugehörige Raum der Courant-Elemente. Beweise die inverse Ungleichung

$$\|v_h\|_{0,\infty} \le ch^{-1}\,\|v_h\|_{0,2} \qquad \forall v_h \in S_h\,,$$

wobei $c > 0$ eine nur von der Familie und nicht von $\mathfrak{T}_h$ abhängige Konstante ist. (Hinweis: Verwende im Beweis eine geeignete Kubaturformel.)

Aufgabe 4.3 **2 Punkte**

Konstruiere eine biquadratische Abbildung des Einheitsquadrats $(0,1)^2$ in die Einheitskreisscheibe, so daß die Ecken und Seitenmittelpunkte des Quadrats in äquidistant auf der Peripherie des Kreises verteilte Punkte übergehen, wobei die Forderung $(1, \frac{1}{2}) \mapsto (1,0)$ bestehe und ferner der Mittelpunkt des Quadrats in den Mittelpunkt des Kreises abgebildet werde.

Aufgabe 4.4 **1 Punkt**

Zeige, daß die Lösung u des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1)^2 \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

nicht in $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ liegt.

Aufgabe 4.5 **1 Punkt**

Zeige, daß Konvexkombinationen gegenüber affin-linearen Transformationen invariant sind.