

Numerik partieller Differentialgleichungen

5. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 15. Juli 2010

Aufgabe 5.1

3 Punkte

Stelle für das homogene Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung auf einem selbst gewählten, konvexen, polygonal berandeten Gebiet (ungleich einem Rechteck) die Finite-Elemente-Approximation (mit mindestens 4 inneren Knoten) unter Verwendung von Courant-Elementen auf und verwende dabei, daß die Courant-Elemente eine affin-äquivalente Familie bilden. Welche Fehleraussagen gelten unter welchen Voraussetzungen? Berechne für eine selbst gewählte rechte Seite die Näherungslösung und vergleiche diese mit der exakten Lösung (in einer dem Problem angepaßten Norm). (Hinweis: Exakte Lösung vorgeben und daraus die rechte Seite berechnen.)

Aufgabe 5.2

3 Punkte

a) Beweise für ein Parallelogrammgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ die Poincarésche Ungleichung

$$\|u\|_{0,2} \leq c \left(|u|_{1,2}^2 + \left(\int_{\Omega} u \, dx \right)^2 \right)^{1/2} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

(Hinweis: Transformation auf das Einheitsquadrat.)

b) Beweise mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung aus Teil a) den folgenden Spezialfall des Lemmas von Bramble-Hilbert: Sei $F \in (H^2(\Omega))^*$ mit $F(q) = 0$ für alle $q \in \mathcal{P}^1(\Omega)$. Dann gibt es ein $c = c(\Omega, F) > 0$, so daß für alle $v \in H^2(\Omega)$

$$|F(v)| \leq c |v|_{2,2}$$

gilt.

Aufgabe 5.3

1 Punkt

Vorgelegt sei das Tripel (T, P_T, Σ_T) , wobei T ein Rechteck, $P_T = \mathcal{Q}^1(T)$ und $\Sigma_T = \{\Phi_{i,T} : i = 1, 2, 3, 4\}$ mit

$$\Phi_{i,T}(v) := v(\text{Mittelpunkt der } i\text{-ten Seite von } T), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

seien. Zeige, daß Σ_T bezüglich P_T *nicht* unisolvent (und mithin (T, P_T, Σ_T) kein finites Element) ist.

Aufgabe 5.4

3 Punkte

Es sei (T, P_T, Σ_T) das sogenannte Bogner-Fox-Schmit-Element. Dabei ist T ein Rechteck, $P_T = \mathcal{Q}^3(T)$ und Σ_T bestehe aus den Funktionalen, die die Auswertung

- der Funktion,
- der beiden ersten Ableitungen,
- der gemischten zweiten Ableitungen

jeweils in den vier Ecken von T besorgen. Bestimme die Dimension von P_T , zeige, daß Σ_T bezüglich P_T unisolvent ist, und bestimme die lokale Basis.

(Hinweis: Betrachte das Einheitsquadrat und konstruiere die Basisfunktionen als Tensorprodukt, d. h. $\phi_{ij,T}(x, y) = p_i(x) \cdot q_j(y)$.)