Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld
Sommersemester 2011

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2011

Übungsblatt 1

Die Lösungen sind vor dem Tutorium in der Woche vom **17.04.–21.04.2011** abzugeben.

Aufgabe 1.1 [Vandermonde-Matrix] (3 Punkte)

a) Bestimme die Determinante der Vandermonde-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

und weise nach, dass diese für paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, ..., x_n$, $n \in \mathbb{N}$ nicht verschwindet.

b) Ermittle mit Hilfe der Vandermonde-Matrix das Interpolationspolynom vom Höchstgrade 2, das durch die Punkte $(0,1)$, $(1,2)$ und $(2,1)$ verläuft.

Aufgabe 1.2 [Lagrange-Polynome] (1 Punkt)
Bestimme mit Hilfe der Lagrange-Polynome das Interpolationspolynom vom Höchstgrade 3, das durch die Punkte $(1,-16)$, $(2,-15)$, $(5,0)$ und $(6,9)$ verläuft.

Aufgabe 1.3 [Newton-Ansatz] (2 Punkte)
Berechne mit dem Newton-Ansatz die Interpolationspolynome $p_{2N} \in \mathcal{P}^{2N}, N = 1,2,3,4,5,$ zur Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Verwende die ganzen Zahlen im Intervall $[-N, N]$ als Stützstellen.
Stelle f und p_{10} im Intervall $[-5,5]$ im selben Diagramm graphisch dar!

Aufgabe 1.4 [Interpolation einer Polynomfunktion] (1 Punkt)
Beweise unter Verwendung des Fundamentalsatzes der Algebra:
Ist $f \in \mathcal{P}^n$, $n \in \mathbb{N}$, so stimmt – unabhängig von der Wahl der Stützstellen $x_0, ..., x_n$ – das Interpolationspolynom $p_n \in \mathcal{P}^n$ mit f überein.

Aufgabe 1.5 [Linearität und Beschränktheit des Interpolationsoperators] (3 Punkte)
Es bezeichne I_n, $n \in \mathbb{N}$, jene Abbildung (Operator), die einer beliebigen Funktion $f \in \mathcal{C}[a,b]$ das Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}^n$ zu den paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, ..., x_n \in [a,b]$ zuordnet:

$$I_n : \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{P}^n, \quad I_n f = p.$$

Man zeige:

a) Die Abbildung I_n ist linear.

b) Die Abbildung I_n ist auf $[a,b]$ bezüglich der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ beschränkt, d. h.

$$\exists c > 0 \, \forall f \in \mathcal{C}[a,b] \ : \quad \|I_n f\|_\infty \leq c \, \|f\|_\infty,$$

wobei die Konstante c nur von $[a,b]$, n und den Stützstellen, nicht aber von f abhängt.

c) Die Koeffizienten von p hängen stetig von den Stützwerten $y_k = f(x_k)$, $k = 0, .., n$, ab.

Hinweis: Für a) und b) ist die Lagrangesche Darstellung von $I_n f$ nützlich, während c) auf ein lineares Gleichungssystem und dessen Stabilität zurückgeführt werden kann.