Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld
Sommersemester 2011

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2011

Übungsblatt 10

Die Lösungen sind vor dem Tutorium in der Woche vom **20.06.–24.06.2011** abzugeben.

Aufgabe 10.1 [Schnittpunkt von Ebenen im Raum] (3 Punkte)

Für eine grafische Auswertung ist festzustellen, ob die Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 &: x_1 + x_2 + 4x_3 - 1 = 0 \\ E_2 &: x_1 - x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \\ E_3 &: 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 1 = 0 \end{aligned}$$

einen gemeinsamen Punkt besitzen.

a) Schreibe das Problem als lineares Gleichungssystem $Ax = b$ und löse dieses mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Ist eine Pivotisierung erforderlich?

b) Bilde die LR-Faktorisierung von A.

c) Berechne die Zeilensummennorm, die Spaltensummennorm, die Frobeniusnorm und die Kondition von A.

Aufgabe 10.2 [Cholesky-Zerlegung] (3 Punkte)

Gegeben sei die parameterabhängige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & c \\ -1 & 5 & 2 \\ c & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimme die Cholesky-Zerlegung von A. Überprüfe dabei, für welche c eine solche existiert.

b) Berechne die Determinante von A.

c) Es sei nun $c = 0$. Ermittle die Lösung von $Ax = b$ für $b = (1, -1, 0)^T$ mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung aus a).

Aufgabe 10.3 [Householder-Transformation] (2 Punkte)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{31}{30} \end{pmatrix}.$$

a) Löse mit Hilfe von Householder-Transformationen das Gleichungssystem $Ax = b$.

b) Weiterhin seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ zwei linear unabhängige Vektoren mit $\|a\|_2 = \|b\|_2$. Konstruiere eine Householder-Transformation H, für die $Ha = b$ gilt.

Aufgabe 10.4 [Sherman-Morrison-Formel] (2 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine nichtsinguläre Matrix und $u, v \in \mathbb{R}^n$. Man zeige:

a) Im Fall $v^T A^{-1} u \neq 1$ gilt

$$(A - uv^T)^{-1} = A^{-1} + \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 - v^T A^{-1} u}.$$

b) Im Fall $v^T A^{-1} u = 1$ ist die Matrix $A - uv^T$ singulär.