Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld
Sommersemester 2011

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2011

Übungsblatt 11

Die Lösungen sind vor dem Tutorium in der Woche vom **27.06.–01.07.2011** abzugeben.

Aufgabe 11.1 [Gleichungssystem mit nichtquadratischer Matrix] (4 Punkte)

Wir betrachten die Normalgleichungen $A^T Ax = A^T b$ mit
$A \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq n+1$, $m, n \in \mathbb{N}$.

a) Sei $A = QR$ eine Faktorisierung von A mit einer quadratischen, orthogonalen Matrix Q und einer rechteckigen Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\hat{R} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Man zeige, dass dann – bis auf die Wahl von Vorzeichen – $\hat{R}^T\hat{R}$ eine Cholesky-Zerlegung von $A^T A$ ist.

b) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0,$$

bestimme man exakt mit Hilfe von Householder-Transformationen eine Zerlegung $A = QR$. Anschließend vergleiche man $\hat{R}^T\hat{R}$ mit einer Cholesky-Zerlegung von $A^T A$.

c) Man beweise, dass die Matrix $A^T A$ die Eigenwerte $3+\varepsilon^2$, ε^2, ε^2 besitzt. Was lässt sich über die Kondition von $A^T A$ bzgl. der Spektralnorm aussagen?

d) Was lässt sich über die Lösung der Normalgleichungen aussagen, wenn ε klein ist?

Aufgabe 11.2 [Strikt normierte Räume] (2 Punkte)

Beweise, dass ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ genau dann strikt normiert ist, wenn gilt:

$$\forall u, v \in V\backslash\{0\} : \|u\| + \|v\| = \|u+v\| \Rightarrow u \text{ und } v \text{ sind linear abhängig.}$$

Aufgabe 11.3 [Ausgleichsrechnung] (2 Punkte)

In der (x, y)-Ebene seien folgende Punkte gegeben:

$$(1,2) \quad (2,1) \quad (3,3) \quad (4,6) \quad (5,10)$$

Man bestimme dasjenige Polynom $p = p(x)$ ersten Grades, welches die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{j=1}^{5}(p(x_j) - y_j)^2$ minimiert unter Verwendung einer Cholesky-Zerlegung der zugehörigen Normalengleichung. Weiterhin bestimme man das Polynom q zweiten Grades, welches die Summe der Fehlerquadrate minimiert, dieses Mal unter Verwendung einer QR-Zerlegung.

Aufgabe 11.4 [Ausgleichsrechnung] (2 Punkte)

Im (x, y, z)-Raum seien folgende Punkte gegeben:

$$(0,0,1) \quad (1,0,5) \quad (1,1,3) \quad (0,1,4)$$

Man bestimme dasjenige Polynom $p = p(x,y) = ax + by + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$, welches die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{j=1}^{4}(p(x_j, y_j) - z_j)^2$ minimiert.

Aufgabe 11.5 [Fehlerfortpflanzung] (3 Punkte)

Betrachte die quadratische Gleichung $x^2 - 2p_1 + p_2 = 0$ mit $0 < p_2 \ll 1 < p_1$.
Die kleinere der beiden Lösungen ist offenbar $x^* = p_1 - \sqrt{p_1^2 - p_2}$.

a) Untersuche die Kondition des Problems.

b) Es seien $p = 6,002$ und $q = 0,01$. Die Gleitkommaoperationen werden mit 5 signifikanten Stellen durchgeführt. Zur Berechnung von x^* werde folgender Algorithmus verwendet:
$z_1 = p_1 * p_1 \quad z_2 = z_1 - p_2 \quad z_3 = \sqrt{z_2} \quad z_4 = p_1 - z_3 \quad x^* = z_4$
Prüfe, wie viele Stellen des exakten Ergebnisses berechnet werden.

c) Gib einen stabileren Algorithmus zur Berechnung von x^* an.