Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld
Sommersemester 2011

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2011

das letzte Übungsblatt, Übungsblatt 12

Die Lösungen sind vor dem Tutorium in der Woche vom **11.07.–15.07.2011** abzugeben.

Aufgabe 12.1 [Heron-Verfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel] (2 Punkte)

Die irrationale Zahl $\sqrt{7}$ soll mit Hilfe des Heron-Verfahrens, auch babylonische Iteration genannt, näherungsweise berechnet werden. Die Iterationsvorschrift lautet

$$x_{k+1} = \frac{x_k + \frac{7}{x_k}}{2}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \quad x_0 > 0.$$

Deute die Fixpunktgleichung als Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren und beweise die folgenden Aussagen:

a) $x_0 \neq \sqrt{7} \Rightarrow x_1 > \sqrt{7}$,

b) $x_k > \sqrt{7} \Rightarrow x_k > x_{k+1}$,

c) $|x_{k+1} - \sqrt{7}| \leq \frac{1}{2}(x_k - \sqrt{7})^2$,

d) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \sqrt{7}$.

Aufgabe 12.2 [Newton-Verfahren, eindimensional] (3 Punkte)

a) Zeige, dass die nichtlineare Gleichung

$$x - 2\sin x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

genau 3 Lösungen besitzt und gib möglichst kleine Intervalle an, in denen sie liegen.

b) Beweise, dass die Iterierten $x_{k+1} = 2\sin x_k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$ für alle Startwerte $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, 2)$ gegen die in diesem Intervall liegende Lösung von (1) konvergieren.

c) Wende das Newton-Verfahren auf (1) an und beweise die Fehlerabschätzung

$$|x^* - x_{k+1}| \leq C \cdot |x^* - x_k|^2, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

wobei x^* die Lösung von (1) im Intervall $(\frac{\pi}{2}, 2)$ und x_k die Newton-Iterierten bezeichne. Nutze die Taylor-Entwicklung der die Newton-Iterierten erzeugenden Funktion um x^*.

d) Berechne für $x_0 = 1,6$ die ersten 6 Iterierten nach Teilaufgabe b) und so viele Newton-Iterierte, bis die Lösung auf 3 signifikante Stellen genau bestimmt ist. Stelle beide Iterationsmethoden in einem Diagramm graphisch dar und interpretiere das Ergebnis.

Aufgabe 12.3 [Newton-Verfahren, mehrdimensional] (1 Punkt)

Mit Hilfe des Newton-Verfahrens soll das nichtlineare Gleichungssystem

$$\sin(x+y) = e^{x-y}$$
$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{4}{\pi} y$$

näherungsweise gelöst werden. Bestimme die erste Iterierte, wenn mit $(x_0, y_0) = (0, 0)$ gestartet wird.

Aufgabe 12.4 [verallgemeinerter Banachscher Fixpunktsatz] (1 Punkt)

Man beweise:

> Ist T eine stetige Abbildung einer nichtleeren abgeschlossenen Teilmenge M eines Banachraumes X in sich, für die eine gewisse Potenz T^n kontrahierend ist, so besitzt T genau einen Fixpunkt in M.

Aufgabe 12.5 [Lösbarkeit eines nichtlineares Gleichungssystems] (2 Punkte)

Seien $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$. Gesucht ist eine Lösung $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ des nichtlinearen Gleichungssystems

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \sin(c_{ij} x_j) + b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

a) Man gebe eine hinreichende Bedingung an C und b an, die die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems sichert.

b) Man gebe eine iterative Vorschrift zur Bestimmung dieser Lösung an und schätze den Fehler zwischen einer Iterierten und der exakten Lösung ab.

Aufgabe 12.6 [Praktische Aufgabe]

Wir betrachten das komplexe Polynom $f(z) = z^4 - 1$, $z \in \mathbb{C}$, dessen Nullstellen die vierten Einheitswurzeln sind. Es soll untersucht werden, für welche Startwerte das Newton-Verfahren praktisch gegen welche der Wurzeln konvergiert (Basins of attraction).
Dazu sei der Bereich

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq \mathbf{Re}(z) \leq 1\,,\ -1 \leq \mathbf{Im}(z) \leq 1\}$$

in $(N+1) \times (N+1)$ Punkte äquidistant diskretisiert. Jeder dieser Punkte dient als Startwert für das Newton-Verfahren. Ist der Betrag der Differenz zwischen einer Iterierten und der i-ten Wurzel kleiner als ε, so wird der Punkt mit der Farbe i ($i = 1, 2, 3, 4$) gefärbt. Nähern sich die Iterierten keiner der Wurzeln, so bleibt der Punkt ungefärbt.

a) Gib die Wurzeln des Polynoms an und beschreibe das zu verwendende Newton-Verfahren. Wegen $z, f(z) \in \mathbb{C}$ entspricht das Problem einem 2×2 Problem. Zerlege in Real- und Imaginärteil.

b) Führe die Aufgabe praktisch mit verschiedenen Werten für N und ε durch.