Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld
Sommersemester 2011

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2011

Übungsblatt 2

Die Lösungen sind vor dem Tutorium in der Woche vom **26.04.–29.04.2011** abzugeben.

Aufgabe 2.1 [Tschebyschew-Polynome] (5 Punkte)
Das n-te Tschebyschew-Polynom erster Art $T_n = T_n(x)$ ($x \in [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$) ist definiert durch

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \tag{1}$$

a) Man berechne die Tschebyschew-Polynome $T_0, ..., T_4$ und stelle diese graphisch dar.

b) Man beweise die rekursive Vorschrift

$$T_n(x) = 2x\, T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, ...$$

und zeige damit, dass $T_n \in \mathcal{P}^n$ gilt und der führende Koeffizient 2^{n-1} ist, falls $n \geq 1$.

c) Man beweise die explizite Darstellung

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left((x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n\right).$$

d) Man zeige, dass T_n im Intervall $(-1, 1)$ der Differentialgleichung

$$(1 - x^2)\, T_n''(x) - x\, T_n'(x) + n^2\, T_n(x) = 0$$

genügt.

e) Man beweise die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x) \cdot T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi/2 & \text{für } m = n \neq 0 \\ \pi & \text{für } m = n = 0 \end{cases}.$$

f) Man bestimme die Nullstellen und Extrema der Tschebyschew-Polynome.

g) Zeige $\|T_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.2 [Dividierte Differenzen] (1 Punkt)
Gegeben seien die Punkte $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 (n \in \mathbb{N})$ zu paarweise veschiedenen Stützstellen $x_0, ..., x_n$. Zeige, dass das interpolierende Polynom $p_n \in \mathcal{P}^n$ gegeben ist durch

$$p_n(x) = c_0 + c_1\omega_1(x) + ... + c_n\omega_n(x), \text{ wobei}$$
$$c_0 = y_0,\ c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},\ c_2 = \frac{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} - \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0}, \text{ usw.}$$

Aufgabe 2.3 [Abschätzung bei äquidistanten Stützstellen] (1 Punkt)
Zeige die Abschätzung $\|\omega_{n+1}\|_\infty \leq \frac{n!}{4}h^{n+1}$, wobei $h = \frac{b-a}{n}$ $(n \geq 1)$, wenn die Stützstellen äquidistant gewählt sind.

Aufgabe 2.4 [Gleichmäßige Konvergenz] (1 Punkt)
Man beweise: Wird $f(x) = 1/(1 + x)$ in den äquidistanten Stützstellen $x_i^{(n)} = i/n$, $i = 0, 1, ..., n$ $(n \in \mathbb{N})$, durch das Polynom $p_n \in \mathcal{P}^n$ interpoliert, dann konvergiert die Folge der Interpolationspolynome $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf dem Intervall $[0, 1]$ *gleichmäßig* gegen f.

Aufgabe 2.5 [Interpolationsfehler] (2 Punkte)
Die Funktion $f(x) = \ln x$ werde in den Stützstellen 10, 11 und 12 quadratisch interpoliert.

a) Man schätze den Interpolationsfehler an der Stelle 11.1 ab.

b) Wie hängt das Vorzeichen des Interpolationsfehlers von x ab?

Aufgabe 2.6 [Genauigkeit der Interpolation] (2 Punkte)
Die Funktion $f(x) = \sin x$ soll äquidistant auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ durch ein Polynom $p \in \mathcal{P}^n$ interpoliert werden. Wie groß muss n gewählt werden, damit $|f(x) - p(x)| \leq 10^{-10}$ für alle $x \in [0, 2\pi]$ gewährleistet ist?

Aufgabe 2.7 [Programmieraufgabe zum Beispiel von Runge]
Zu der Funktion $f : [-5, 5] \rightarrow: \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ bestimme man die interpolierenden Polynome vom Grade n für großes n bei äquidistanter Zerlegung des Intervalles $[-5, 5]$ und stelle die Fehlerfunktion graphisch dar. Desweiteren versuche man, eine geeignetere Zerlegung zu finden, die eine bessere Approximation ergibt (Tschebyschew-Stützstellen).

Hinweis: Die vorgenannte Aufgabe gehört zu den praktischen Aufgaben, für deren Bearbeitung das Programmpaket MATLAB empfohlen wird (hier insbesondere die Funktion `polyfit`). Abzugeben sind ein leicht verständlicher, kommentierter Programmausdruck und die erzielten Ergebnisse samt Erläuterungen und Zusammenfassung in übersichtlicher Form.

Von den Programmieraufgaben sind mindestens die Hälfte zu bearbeiten.

Zusatzaufgabe
Aufgabe 2.8 [Interpolation der Betragsfunktion] (3 Punkte)
Interpoliere die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ auf $[-1, 1]$ durch Polynome p_n mit Maximalgrad $n,\ n = 1, 2, 3, ...$ Die Stützstellen seien dabei jeweils äquidistant gewählt.
Zeige, dass für alle $x \in [-1, 1]\backslash\{-1, 0, 1\}$ die Folge $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.