Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld
Sommersemester 2011

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2011

Übungsblatt 3

Die Lösungen sind vor dem Tutorium in der Woche vom **02.05.–06.05.2011** abzugeben.

Aufgabe 3.1 [Satz von Weierstraß für Banach-Räume] (2 Punkte)

Es sei X ein Banach-Raum. Man zeige: Zu jedem $f \in \mathcal{C}([a,b];X)$ gibt es eine Folge von Polynomen, die in X gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 3.2 [Bernstein-Polynome] (5 Punkte)

In der Praxis werden oft solche stückweise polynomialen Basisfunktionen (Splines) zur Interpolation bzw. Approximation von Funktionen benutzt, die eine geometrische Interpretation mit Hilfe der Spline-Koeffizienten erlauben: Die Spline-Koeffizienten legen den ungefähren Verlauf der Kurve fest und aus ihnen kann auf geometrische Eigenschaften der Kurve geschlossen werden. Solche Basisfunktionen haben eine große Bedeutung in der interaktiven Arbeit, da mit ihrer Hilfe Kurven schnell gezeichnet und manipuliert werden können.

Ein Beispiel für derartige Basisfunktionen sind die *Bernstein-Polynome*, über die sich die *Bézier-Splines* definieren lassen. Unter dem k-ten Bernstein-Polynom vom Grade n auf dem Intervall $I = [0,1]$ versteht man dabei das Polynom

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n, \ \ t \in I.$$

a) Man weise folgende Eigenschaften der Bernstein-Polynome nach:

(i) $B_k^n(t) = B_{n-k}^n(1-t)$ für $i = 0, 1, ..., n$.

(ii) $(1-t)B_0^n(t) = B_0^{n+1}(t)$ und $tB_n^n(t) = B_{n+1}^{n+1}(t)$.

(iii) Die Polynome B_k^n sind nichtnegativ auf I und bilden eine Partition der Eins, d. h.

$$B_k^n(t) \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) = 1 \quad \forall t \in I.$$

(iv) B_k^n hat für $k = 1, ..., n-1$ im Intervall I genau ein Maximum, und zwar bei $t = k/n$.

(v) Die Bernstein-Polynome genügen für $k = 1, ..., n-1$ der rekursiven Vorschrift

$$B_k^n(t) = tB_{k-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_k^{n-1}(t).$$

b) Für $n = 4$ stelle man die Bernstein-Polynome graphisch dar.

c) Ein Polynom p vom Grade n läßt sich bezüglich der durch die Bernstein-Polynome gebildeten Basis in der Form

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k B_k^n(t) \tag{1}$$

darstellen. Die Punkte $(\frac{k}{n}, b_k) \in I \times \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., n$, heißen ***Bézier-Punkte*** von p und der durch sie bestimmte Polygonzug ***Bézier-Polygon***.
Man zeige, dass das Bézier-Polygon und das Polynom p folgende Eigenschaften besitzen:

(i) Anfangs- und Endpunkt des Polynoms im Intervall I, d. h. $(0, p(0))$ und $(1, p(1))$, stimmen mit denen des Bézier-Polygons überein.

(ii) Die Steigungen der Tangenten in den Randpunkten des Polynoms stimmen mit denen der Randkanten des Bézier-Polygons überein.

d) Man stelle das Polynom $p(x) = 10x^3 - 15x^2 + 6x + 1$ in der Form (1) dar und veranschauliche p und das zugehörige Bézier-Polygon graphisch. Was ändert sich, wenn man $b_1 = 6$ und $b_2 = -2$ setzt?

Zusatzaufgabe
Aufgabe 3.3 [Tensorstruktur] (2 Punkte)

Es sei X ein reeller Banach-Raum. Man zeige: Der Raum $\mathcal{C}([a, b]; X)$ hat Tensorstruktur, d. h. $X \otimes \mathcal{C}([a, b])$ liegt dicht in $\mathcal{C}([a, b]; X)$. Dabei ist $X \otimes \mathcal{C}([a, b])$ der Raum aller endlichen Summen der Gestalt $\sum_{i=1}^{m} x_i \varphi_i(\cdot)$ mit $x_i \in X$ und $\varphi_i \in \mathcal{C}([a, b])$, $i = 1, ..., m$.