Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld
Sommersemester 2011

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2011

Übungsblatt 4

Die Lösungen sind vor dem Tutorium in der Woche vom **09.05.–13.05.2011** abzugeben.

Aufgabe 4.1 [Landau-Symbolik] (2 Punkte)

Man schreibe die folgenden Ausdrücke in der Form

$$f(h) = \mathcal{O}(h^p), \quad f(h) = o(h^p) \quad (\text{für } h \to 0+) \quad \text{bzw.} \quad g(n) = \mathcal{O}(n^p) \quad (\text{für } n \to \infty)$$

mit möglichst großem bzw. kleinem $p \in \mathbb{N}$ und gebe jeweils eine Begründung an.

a) $f(h) = 5(h^2 + h)^2 - h^4$

b) $f(h) = (\ln h)^{-1}$

c) $f(h) = h^{-2}\left(\sin(1+h) - 2\sin(1) + \sin(1-h)\right) + \sin(1)$

d) $g(n) = 5(n^2 + n)^2 - n^4$

e) $g(n) = \sup\limits_{x>0} \frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$

Zur Erinnerung:

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \limsup \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty,$$

$$f(x) = o(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \lim \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0.$$

Aufgabe 4.2 [Spline-Konstruktion] (3 Punkte)

Gegeben seien die Punkte $(0, 2), (1, 1), (2, 2)$.

a) Man gebe das Newtonsche Interpolationspolynom p_2 an.

b) Man bestimme den quadratischen Spline s_2 durch die Punkte mit der zusätzlichen Bedingung $s_2'(0) = 1$.

c) Stelle einen grafischen Vergleich der Funktionen p_2 und s_2 im Intervall [0,2] an. An welcher Stelle ist die Abweichung $|p_2 - s_2|$ am größten?

d) Berechne den natürlichen kubischen Spline s_3.

Aufgabe 4.3 [Restriktion von L^p-Funktionen] (2 Punkte)

Es sei $f \in L^p(a,b)$, d. h. insbesondere $\int\limits_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty$.
Ferner sei zu jedem $n \in \mathbb{N}$ der Operator $R_n : L^p(a,b) \to L^p(a,b)$ definiert durch

$$(R_n f)(x) = \frac{1}{h} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\, dx, \quad \text{falls } x \in (x_{j-1}, x_j],$$

wobei $h = \frac{b-a}{n}$ und $x_j = a + jh,\ j = 1, ..., n$, $(R_n f)(a) = (R_n f)(x_1)$.
Beweise $R_n f \xrightarrow{n\to\infty} f$ in $L^p(a,b)$.
Benutze dabei, dass $\mathcal{C}^1([a,b])$ dicht in $L^p(a,b)$ liegt.

Aufgabe 4.4 [L^2-Norm] (1 Punkte)

Es sei $\mathcal{C}([a,b])$ der Raum der auf $[a,b]$ stetigen Funktionen und $\|g\|_2 = \left(\int\limits_a^b |g(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$.
Zeige, dass $\|\cdot\|_2$ eine Norm auf $\mathcal{C}([a,b])$ ist, aber $\mathcal{C}([a,b])$ mit dieser Norm nicht vollständig ist.

Aufgabe 4.5 [Kubische Splines] (2 Punkte)

Es bezeichne S den linearen Raum der kubischen natürlichen Spline-Funktionen auf dem Intervall $[0,2]$ zu den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

a) Welche der folgenden Funktionen liegen in S?

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(x-6) - (x-2)^3 \\ g(x) &= \max\{0,\, x-1\}^3 - \frac{x^3}{2} \end{aligned}$$

b) Man bestimme den interpolierenden Spline $s \in S$ für die Funktion $f(x) = x^3$. Wie lautet das Ergebnis, wenn die natürlichen Randbedingungen durch die Interpolationsbedingungen

$$s''(x_0) = f''(x_0)\,, \quad s''(x_2) = f''(x_2)$$

ersetzt werden?

Zusatzaufgabe

Aufgabe 4.6 [Interpolation bei gegebenen Mittelwerten] (3 Punkte)

Bei zahlreichen Anwendungen (etwa Finite-Volumen-Methode zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen oder Intensitätsmessungen) sind nicht Funktionswerte $u(x_i)$, sondern Mittelwerte u_i gegeben, aus denen die Funktion $u = u(x)$ rekonstruiert werden soll.

Vorgelegt sei eine äquidistante Zerlegung der Schrittweite $h = (b-a)/n$ des Intervalls $[a, b]$. Aus den Mittelwerten

$$u_i := \frac{1}{h} \int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(\xi) d\xi, \quad x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2} = a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h, \quad (i = 0, ..., n-1),$$

soll durch geeignete Interpolation die Funktion $u = u(x)$ approximiert werden.

a) Man zeige: Ist $u \in \mathcal{C}^2([a, b])$, so gibt es ein $c > 0$ mit

$$|u(x_i) - u_i| \leq ch^2, \quad i = 1, ..., n-1.$$

b) Wegen a) würde die herkömmliche Interpolation stets auf die Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ beschränkt sein. Finden Sie eine Interpolationstechnik, die bei glatter Funktion u dennoch auf eine Approximation von beliebiger Ordnung führt, sofern nur genügend Mittelwerte u_i gegeben sind.

Hinweis: Man approximiere zunächst die Stammfunktion von u.