Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld
Sommersemester 2011

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2011

Übungsblatt 5

Die Lösungen sind vor dem Tutorium in der Woche vom **16.05.–20.05.2011** abzugeben.

Aufgabe 5.1 [Finite-Elemente-Methode] (2 Punkte)

Bei der Finite-Elemente-Methode (FEM), einem numerischen Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen, finden lineare Hutfunktionen (lineare Splines) Anwendung. Gegeben sei das Intervall $[a, b]$ und eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ mit den Schrittweiten $h_i := x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Dann sind die linearen Hutfunktionen definiert durch

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i} & \text{falls } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} & \text{falls } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

a) Skizzieren Sie die linearen Hutfunktionen. Wie könnten ϕ_0 und ϕ_n sinnvoll definiert werden?

   Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

b) Die linearen Hutfunktionen sind nichtnegativ, bilden eine Partition der Eins und eine Knotenbasis.

c) Sei $h_0 = h_{n+1} = 0$ vereinbart. Dann gilt:

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)\,dx = \begin{cases} \frac{h_i + h_{i+1}}{3} & \text{für } i = j \\ \frac{h_{\max(i,j)}}{6} & \text{für } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Aufgabe 5.2 [Interpolation im $\mathbb{R}^2$] (5 Punkte)

Gegeben sei ein polygonal berandetes, einfach zusammenhängendes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Über Ω sollen stetige Funktionen $u = u(x,y)$ stückweise linear interpoliert werden. Hierzu wird Ω trianguliert, d. h. in (mindestens zwei) Dreiecke zerlegt. Da über jedem der Dreiecke eine lineare Funktion eindeutig bestimmt ist durch die Funktionswerte

(i) in den Ecken oder

(ii) in den Seitenmittelpunkten,

ergeben sich zwei verschiedene Möglichkeiten der Interpolation. Die interpolierenden Funktionen seien mit $u_1 = I_1 u$ (Ecken) und $u_2 = I_2 u$ (Seitenmittelpunkte) bezeichnet.

a) Für das Gebiet $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, zerlegt in zwei Dreiecke, veranschauliche man I_1 und I_2 und bestimme u_1 und u_2 für die Funktion $u(x,y) = xy$. Man vergleiche die Werte $u_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sowie $u_2(0,0)$ und $u_2(1,1)$ mit den exakten Werten.

b) Sind u_1 und u_2 stets stetig?

c) Die Interpolierenden u_1 und u_2 können als Linearkombination von Basisfunktionen (Knotenbasis) dargestellt werden:

$$u_1(x,y) = \sum_{E_i \text{ ist Ecke}} u(E_i)\, \phi_i^{(1)}(x,y) \tag{1}$$

$$u_1(x,y) = \sum_{S_i \text{ ist Seitenmittelpunkt}} u(S_i)\, \phi_i^{(2)}(x,y)\,. \tag{2}$$

Dabei sind die Basisfunktionen $\phi_i^{(1,2)}$ wiederum stückweise lineare Funktionen mit der Basiseigenschaft

$$\begin{aligned} \phi_i^{(1)}(E_j) &= \delta_{ij} \quad \text{für alle Ecken } E_j \text{ der Zerlegung} \\ \phi_i^{(2)}(S_j) &= \delta_{ij} \quad \text{für alle Seitenmittelpunkte } S_j \text{ der Zerlegung.} \end{aligned}$$

Jedem Knoten (Ecke bzw. Seitenmittelpunkt) ist also genau eine Basisfunktion zugeordnet, die nur in diesem Knoten den Wert 1 hat und in allen anderen Knoten den Wert 0 annimmt.

Bestimmen Sie die Basisfunktionen für das Beispiel aus Teilaufgabe a) und vergleichen Sie die Darstellungen (1), (2) mit den in a) erzielten Ergebnissen.

d) Zeigen Sie (mit Hilfe des Eulerschen Polyedersatzes), dass es bei I_1 stets weniger Basisfunktionen als bei I_2 gibt, d. h. die Dimension des linearen Raumes der durch I_1 definierten Splines ist stets niedriger als die des Raumes zu I_2.

Aufgabe 5.3 [Diskrete Fourier-Transformation] (3 Punkte)

Es bezeichne $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ jene Abbildung (Operator), die die diskrete Fourier-Transformation realisiert. Es bezeichne $D_2 : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ die durch

$$u \mapsto v = D_2 u\,, \quad v_j = -u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}\,,\ j = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1\,, \quad u_{-1} := u_{N-1}\,,\ u_N := u_0$$

definierte Abbildung. Weiter sei $\lambda_j = 4\sin^2(j\pi/N)$ für $j = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1$.
Man beweise

a)
$$D_2 u = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\lambda_j}{N}\,(u, w^{(j)}) w^{(j)}\,,$$

wobei $w^{(j)} = \left(w_0^{(j)},\, w_1^{(j)},\, \ldots,\, w_{N-1}^{(j)}\right)^T$ mit $w_k^{(j)} = e^{i2\pi jk/N}$.

Hinweis: Bestimme die Fourier-Entwicklung von $D_2 u$ und nutze die Orthogonalität der $w^{(j)}$.

b) Mit $\Lambda := \operatorname{diag}(\lambda_0,\, \lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_{N-1}) \in \mathbb{C}^{N\times N}$ gilt

$$D_2 = \mathcal{F}^{-1}\Lambda\mathcal{F}\,.$$

(Diese Beziehung ist wie folgt zu verstehen: Für alle $u \in \mathbb{C}^N$ gilt $D_2 u = \mathcal{F}^{-1}(\Lambda \cdot (\mathcal{F}u))$. $\mathcal{F}^{-1}$ bezeichnet die inverse Abbildung zu $\mathcal{F}$. Da jeder linearen Abbildung über einem endlichdimensionalen linearen Raum eine Matrix entspricht, kann die Beziehung auch im Sinne einer Gleichheit von Matrizen verstanden werden. Ergebnis aus Teilaufgabe c) nutzen!)

c) Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\lambda \neq \lambda_j$, $j = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1$, gilt

$$(D_2 - \lambda I)^{-1} = \mathcal{F}^{-1}(\Lambda - \lambda I)^{-1}\mathcal{F}\,.$$

Aufgabe 5.4 [Programmieraufgabe]

Man schreibe ein Programm, welches zu einer äquidistanten Zerlegung eines Intervalls bei Vorgabe der Zahl der Teilintervalle, einer Funktion und der Werte der Ableitungen dieser Funktion in den Intervallenden den kubischen Spline mit vollständigen Randbedingungen bestimmt und diesen als auch die Funktion graphisch darstellt. Man teste dieses Programm für mindestens zwei Funktionen, wovon eine nicht elementar sein soll. (Das Programm soll - bis auf Befehle zur Lösung etwaiger Gleichungssysteme und zur graphischen Ausgabe - keine vorgefertigten Befehle oder Routinen verwenden.)