Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld
Sommersemester 2011

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2011

Übungsblatt 6

Die Lösungen sind vor dem Tutorium in der Woche vom **23.05.–27.05.2011** abzugeben.

Aufgabe 6.1 [Newton-Cotes-Formeln] (2 Punkte)

Es sei das Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ äquidistant unterteilt durch die $n+1$ Stützstellen $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$, $i = 0, ..., n$. Zeige, dass die Newton-Cotes-Formeln zu dieser Unterteilung für ungerades n von der Ordnung n und für gerades n von der Ordnung $n+1$ sind.

Aufgabe 6.2 [Ordnung einer Quadraturformel] (2 Punkte)

Zeige, dass die Quadraturformel

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 4f(0) + f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx$$

von der Ordnung 5, aber nicht besser ist. Hinweis: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Aufgabe 6.3 [Legendre-Polynome] (5 Punkte)

Das n-te Legendre-Polynom $L_n = L_n(x),\ x \in [-1,1]$ ist definiert als

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

a) Man gebe die Legendre-Polynome $L_i,\ i = 0, ..., 4$ an und stelle sie graphisch dar.

b) Man zeige die rekursive Vorschrift

$$n \cdot L_n(x) = (2n-1) x L_{n-1}(x) - (n-1) L_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, 4, ...$$

c) Man zeige, dass $L_n,\ n = 0, 1, 2, ...$ der folgenden Differentialgleichung genügt:

$$(1-x^2) L_n^{''}(x) - 2x L_n^{'}(x) + n(n+1) L_n(x) = 0, \quad x \in (-1,1)$$

d) Man zeige die Orthogonalitätseigenschaft

$$(L_m, L_n) := \int_{-1}^{1} L_m(x) L_n(x) dx = \frac{2}{2m+1} \delta_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, 2, ...$$

Man verwende partielle Integration und die Kenntnisse über die Lage der Nullstellen der Ableitung eines Polynoms mit mehrfachen Nullstellen. Das Ergebnis aus c) kann ebenfalls benutzt werden.

e) Es seien $x_k,\ k = 0, ..., n-1$ die Nullstellen von L_n und $p \in \mathcal{P}^{n-1}$ beliebig. Man beweise die Abschätzung

$$\|p\| \leq \sqrt{2} \max_{k=0,\ldots,n-1} |p(x_k)|,$$

wobei $\|\cdot\|$ die durch das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ aus d) induzierte Norm ist.

Aufgabe 6.4 [Diskrete Faltung] (3 Punkte)

Viele Anwendungen der Fourier-Transformation gehen darauf zurück, dass sich Faltungsprodukte von Funktionen mit Hilfe der Fourier-Transformation viel einfacher berechnen lassen. Seien $u = (u_0, \ldots, u_{N-1})^T$, $v = (v_0, \ldots, v_{N-1})^T \in \mathbb{R}^N$. Dann heißt $u * v \in \mathbb{R}^N$ mit

$$(u * v)_k := \sum_{j=0}^{N-1} u_{(k-j)\ mod\ N} v_j = \sum_{j=0}^{k} u_{k-j} v_j + \sum_{j=k+1}^{N-1} u_{N+k-j} v_j\,, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1\,,$$

(diskrete) Faltung und $u \odot v \in \mathbb{R}^{N-1}$ mit

$$(u \odot v)_k := u_k\, v_k\,, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1\,,$$

punktweises Produkt oder Hadamard-Produkt.

a) Faltungsprodukte treten z. B. bei der Multiplikation von Polynomen auf: Seien $p \in \mathcal{P}^m$ und $q \in \mathcal{P}^n$ mit

$$p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_m x^m\,, \quad q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n$$

gegeben. Dann können wir p und q in eineindeutiger Weise Vektoren $\underline{\mathrm{p}} = (p_0, p_1, \ldots, p_m, 0, \ldots, 0)^T$ und $\underline{\mathrm{q}} = (q_0, q_1, \ldots, q_n, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^N$ mit $N = m+n+1$ zuordnen. Man beweise, dass dann dem Produkt $r(x) = p(x)q(x) \in \mathcal{P}^{m+n}$ der Vektor

$$\underline{\mathrm{r}} = \underline{\mathrm{p}} * \underline{\mathrm{q}}$$

entspricht.

b) Es bezeichne $\mathcal{F}$ die diskrete Fourier-Transformation. Man beweise für $u,\, v \in \mathbb{R}^N$ die Faltungssätze

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u * v) &= N\, \mathcal{F}(u) \odot \mathcal{F}(v) \\ \mathcal{F}(u \odot v) &= \mathcal{F}(u) * \mathcal{F}(v)\,. \end{aligned}$$